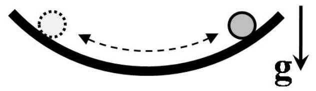
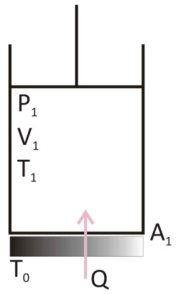
Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 14/02/2012

Problema 1 (Vecchio Ordinamento)
Una sfera si muove senza attrito su una guida metallica avente la forma di un arco di circonferenza. La guida è disposta nel piano verticale e la sfera, soggetta all'accelerazione di gravità $g = 9.81\text{m/s}^2$, compie delle oscillazioni intorno al punto più basso della guida. Sapendo che il periodo delle oscillazioni è $T = 2\text{s}$, si determini il raggio di curvatura della guida.

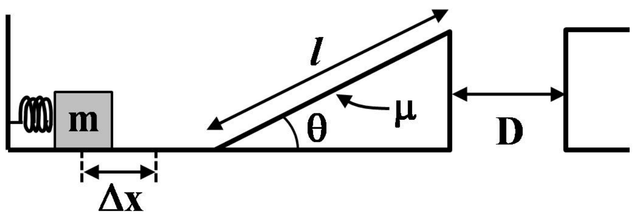


Problema 1 (Nuovo Ordinamento)
Si consideri il sistema in Figura. Su di una piastra a temperatura T_0, è appoggiato un cilindro con all'interno un gas, con temperatura T_1, pressione P_1 e volume V_1. La parte superiore del cilindro è limitata da un pistone libero di muoversi. A causa delle differenza di temperatura, nel sistema entra una certa quantità di calore Q=30 J. Assumendo che la temperatura del gas rimanga costante durante il processo, si calcoli il volume finale del cilindro, V_2. Si assumi P_1=1 atmosfera, V_1=1 dm^3, T_1=25°C.



Problema 2
Un blocco di massa m = 2kg è inizialmente in quiete e viene trattenuto dall'esterno in modo da comprimere una molla per una lunghezza pari a Δx = 0.5m dalla posizione di riposo della molla. Ad un certo istante il sistema viene lasciato libero dall'esterno e la molla spinge il blocco verso il piano inclinato (vedi figura). Il piano inclinato ha lunghezza l = 2m e forma un angolo θ = 30° con il piano orizzontale; il coefficiente di attrito fra piano inclinato e blocco è pari a μ = 0.2 (mentre non si ha alcun attrito sul piano orizzontale che precede il piano inclinato). A distanza D = 3m dalla fine del piano inclinato si trova un secondo piano orizzontale avente una quota pari all'altezza massima del piano inclinato (vedi figura). Si determini:

1) il valore della costante elastica k della molla affinché il blocco raggiunga la sommità del piano inclinato senza oltrepassare tale posizione;
2) il valore minimo della costante elastica k della molla affinché il blocco oltrepassi la sommità del piano inclinato e riesca a superare la distanza D che separa il piano inclinato dal secondo piano orizzontale.

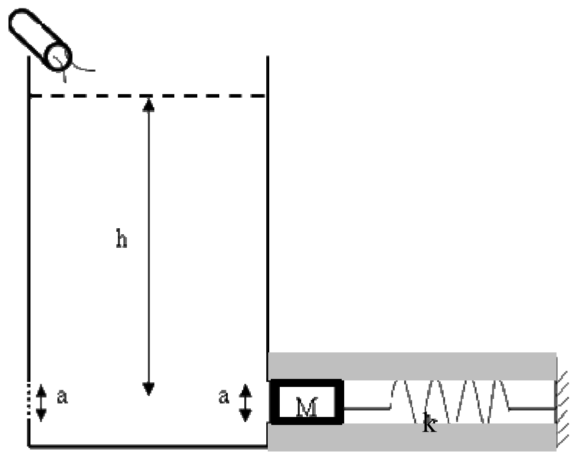


Problema 3
Un contenitore di forma cilindrica di diametro d = 1m è riempito d'acqua ($\rho = 1000\ Kg \cdot m^{-3}$). Ad una profondità h = 10m dal lato libero sono presenti due fenditure quadrate di lato a = 1cm inizialmente chiuse. Posta di fronte ad una di queste aperture vi è una massa M = 3Kg (avente geometria tale da aderire perfettamente alle pareti del contenitore), collegata ad una molla (di costante elastica $k = 8{,}9\ N/m$ e inizialmente a riposo) vincolata a scorrere all'interno di un tubo di sezione pari ad a e in assenza di attrito. Ad un certo istante viene aperta solo la fenditura in corrispondenza della molla e contestualmente si inizia ad immettere acqua dal lato libero in modo che la quota del liquido nel serbatoio rimanga costante. Si determini:

1) la massima compressione della molla in questa condizione.

Raggiunta la condizione di equilibrio viene aperta la seconda fenditura e richiusa nel momento in cui la molla torna a riposo. Si determini:

2) la variazione nella quota del liquido;
3) supponendo che la velocità di fuoriuscita del liquido rimanga costante nel tempo, quanto tempo impiegherà la molla per raggiungere la sua lunghezza di riposo?



Soluzione problema 1 (Vecchio Ordinamento)
Il sistema in figura costituisce un pendolo fisico, ovvero una massa vincolata a muoversi lungo un arco di circonferenza sotto l'azione dell'accelerazione di gravità. Il periodo T delle oscillazioni di un pendolo è dato dalla seguente formula:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

dove l non è altro che il raggio di curvatura.
Invertendo questa formula si ottiene che:

$$l = gT^2/4\pi^2 = (9.81\cdot 4)/(4\cdot 3.14^2) = 1\text{m}$$

Soluzione problema 1 (Nuovo Ordinamento)
La trasformazione secondo la quale evolve il sistema è a temperatura costante, ovvero una isoterma. Si scriva dunque il primo principio della termodinamica:

$$Q_{1-2} = L_{1-2} + \Delta U_{1-2} = L_{1-2} + n\,c_v \Delta T_{1-2}.$$

Poiché la variazione di temperatura ΔT_{1-2} è nulla, la relazione precedente può essere riscritta come:

$$Q_{1-2} = L_{1-2}$$

e dunque, nella trasformazione, il lavoro effettuato dal sistema è uguale al calore fornito al sistema. Il lavoro svolto si può ricavare come:

$$L_{1-2} = \int_{V_2}^{V_2} P dv,$$

ricorrendo all'equazione di stato dei gas perfetti:

$$PV = nRT \Rightarrow P = nRT/V$$

l'integrale può essere risolto in forma chiusa come:

$$L_{1-2} = \int_{v_1}^{v_2} nRT\frac{dv}{v} = nRT ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Eguagliando dunque calore e lavoro

$$Q_{1-2} = L_{1-2} = nRT ln\frac{V_2}{V_1} \Rightarrow ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{Q_{1-2}}{nRT}$$

e utilizzando ancora l'equazione di stato dei gas perfetti, si ha infine:

$$ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{Q_{1-2}}{P_1 V_1} \Rightarrow V_2 = V_1 e^{\frac{Q_{1-2}}{P_1 V_1}}.$$

Utilizzando i valori forniti nel testo (V_1=1 dm^{-3}, P_1=1 atmosfera, Q_{1-2}=30 J), si ottiene V_2=1.35 dm^{-3}.

Soluzione problema 2
Punto 1): Applichiamo l'equivalenza fra differenza di energia meccanica e lavoro fatto dalle forze esterne, tenendo conto che è presente una forza di attrito, F_A, che dissipa energia lungo il piano inclinato. L'energia iniziale E_1 è pari all'energia potenziale della molla, $U_k = \frac{1}{2}k\Delta x^2$, mentre vogliamo che alla fine del piano inclinato il blocco abbia velocità nulla (ovvero energia cinetica pari a zero). Questo significa che alla fine del piano inclinato l'energia finale E_2 del blocco è data solo dall'energia potenziale legata alla variazione di quota, $U_g = mgh$ (con h pari all'altezza del piano inclinato: $h = l\cdot\sin\theta$).
L'equivalenza fra differenza di energia e lavoro fatto dalla forza di attrito diventa allora:

$$E_1 = E_2 + W_A$$

$$U_k = U_g + F_A \cdot l$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \mu mg\cos\theta \cdot l$$

$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgl\cdot(\sin\theta + \mu\cos\theta)$$

dove $W_A = F_A\cdot l$ è il lavoro fatto dalla forza di attrito e $F_A = \mu mg\cdot\cos\theta$ (ovvero $F_A = \mu N$, dove N è la reazione normale del piano inclinato che è uguale e contraria alla componente della forza peso normale al piano inclinato, $mg\cdot\cos\theta$).
Dall'ultima espressione scritta si può ricavare il valore della costante elastica k:

$$k = \frac{2mgl \cdot (\sin\theta + \mu\cos\theta)}{(\Delta x)^2} = 211\text{N/m}$$

Punto 2): Analogamente al punto 1) applichiamo l'equivalenza fra differenza di energia meccanica e lavoro fatto dalla forza di attrito, tenendo presente che il blocco deve arrivare sulla sommità del piano inclinato con velocità sufficiente a superare la distanza D, ovvero l'energia cinetica K alla fine del piano inclinato è diversa da zero ($K \neq 0$).
Dalla fine del piano inclinato fino al secondo piano orizzontale il blocco compie un moto parabolico (moto del proiettile) con gittata pari a D. Per un moto parabolico la gittata è data da:

$$D = \frac{v^2 \sin(2\theta)}{g}$$

dove v è la velocità iniziale del moto parabolico, ovvero la velocità che il blocco deve avere alla fine del piano inclinato per poter superare la distanza D. Invertendo l'ultima espressione si ottiene:

$$v^2 = \frac{g \cdot D}{\sin(2\theta)}$$

L'equivalenza fra differenza di energia e lavoro fatto dalla forza di attrito diventa ora:

$$E_1 = E_2 + W_A$$
$$U_k = U_g + K + F_A \cdot l$$
$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \mu mg\cos\theta \cdot l$$
$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mgl\sin\theta + \frac{1}{2}mg\frac{D}{\sin(2\theta)} + \mu mgl\cos\theta$$
$$\frac{1}{2}k(\Delta x)^2 = mg\left[l \cdot (\sin\theta + \mu\cos\theta) + \frac{D}{2\sin(2\theta)}\right]$$

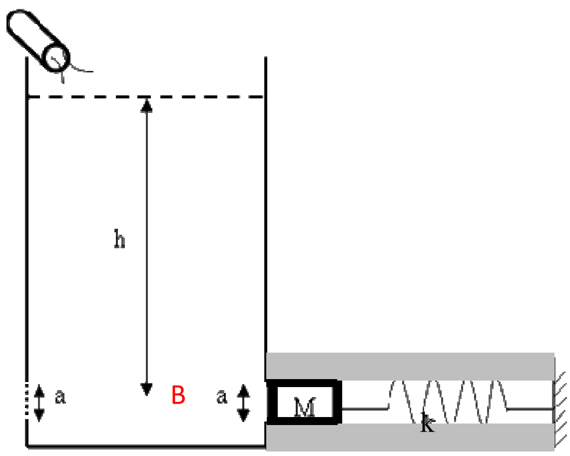
Dall'ultima relazione scritta si ottiene il valore di k cercato:

$$k = \frac{mg}{(\Delta x)^2}\left[2l \cdot (\sin\theta + \mu\cos\theta) + \frac{D}{\sin(2\theta)}\right] = 682\text{N/m}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): La pressione alla quota B è data dalla pressione atmosferica P_0 che si esercita sulla superficie libera più la pressione esercitata dall'acqua all'interno del serbatoio:

$$P_B = P_0 + \rho gh = 2{,}0 \cdot 10^5\,Pa$$



La forza che tale pressione esercita sulla superficie della massa M è pari a:

$$F_B = P_B \cdot a^2 = 20N$$

da cui si ricava la seguente espressione per la compressione della molla:

$$\Delta x = \frac{F_B}{k} = 2{,}2m$$

Punto 2): La variazione nella quota del liquido sarà proprio h. Infatti l'unica forza che induce una compressione nella molla è quella dovuta alla pressione idrostatica, ρgh.

Punto3): Dal teorema di Torricelli segue che la velocità con cui fuoriesce l'acqua è data da:

$$v = \sqrt{2gh} = 14\,{}^{m}/_{s}$$

Di conseguenza la portata è:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{\Delta V}{\Delta t} = \rho \cdot a^2 \cdot v = \rho \cdot R$$

dove $R = a^2 \cdot v$ ed ha il seguente valore:

$$R = 14 \cdot 10^{-4}\ m^3/_s$$

Dall'espressione della portata si vede che l'intervallo di tempo necessario alla fuoriuscita di un certo volume di acqua, ΔV, è pari a:

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{R}$$

Nel nostro caso il volume di acqua è il seguente:

$$\Delta V = V_{Contenitore} + V_{Tubo} = h \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2 \cdot \Delta x = 7{,}9\ m^3$$

e il tempo necessario affinché la molla torni nella sua posizione di riposo è:

$$\Delta t = 5642{,}9\ s$$