Risultati esame scritto Fisica 2 - 19/07/2012
orali: 25-07-2012 alle ore 14.30 presso aula I

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale;

Nuovo ordinamento

	voto	
ALANMANOU	20	ammesso
AMENDOLA	20	ammesso
BUMBACA	12	
COPPOLA	14	
COSENTINI	20	ammesso
CRITELLI	17	ammesso
LONGO	19	ammesso
MASTROIANNI	15	
MERCURIO	15	
MONTUORO	15	
NICOTERA	nc	
SILIPO	11	

Vecchio ordinamento

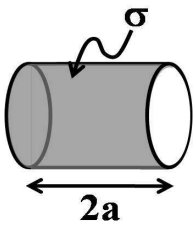
	voto	
COSTA	16	ammesso
NOBILE	12	
TODARO	21	ammesso

Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 19/07/2012

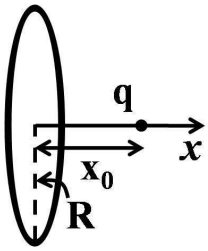
Problema 1



Sia data una carica uniformemente distribuita sulla superficie laterale di un cilindro (e non sulle basi) con densità superficiale pari a σ. Il cilindro ha raggio R e altezza pari a $2a$. Determinare un'espressione per il campo elettrico **E** su un punto generico dell'asse del cilindro.
Si esprima il risultato in funzione della posizione generica sull'asse del cilindro e dei parametri σ, R, a.

Problema 2

Sia dato un anello filiforme di raggio R e con carica totale positiva pari a $+Q$. Lungo il suo asse, a distanza x_0 dal centro dell'anello, si trova una particella puntiforme di massa m e carica positiva $+q$. Inizialmente la carica puntiforme è vincolata a rimanere a distanza x_0; si determini la forza repulsiva che l'anello produce sulla carica puntiforme a tale distanza lungo l'asse. Successivamente la carica $+q$ viene lanciata dalla distanza x_0 verso il centro dell'anello con velocità iniziale v_0; supponendo che il moto della carica $+q$ avvenga solo lungo l'asse dell'anello (ovvero trascurando la forza di gravità), si determini la velocità v_0 minima, detta $v_{0,min}$, affinché la carica $+q$ arrivi nel centro dell'anello. Nel caso in cui la particella di massa m abbia carica negativa $-q$, si calcoli la velocità minima, $v_{0,min}$, con cui deve essere lanciata dalla distanza x_0 nel verso opposto (ovvero lontano dal centro dell'anello) affinché essa riesca a sfuggire dal campo elettrostatico generato dall'anello (si determini cioè la sua velocità di fuga).

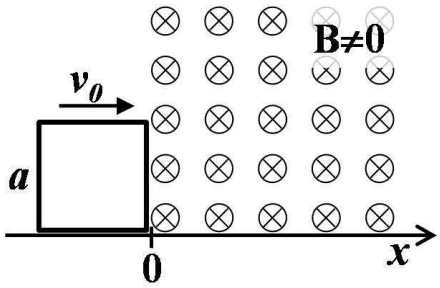


Si esprimano i risultati in funzione di Q, q, x_0, R, m.

Problema 3

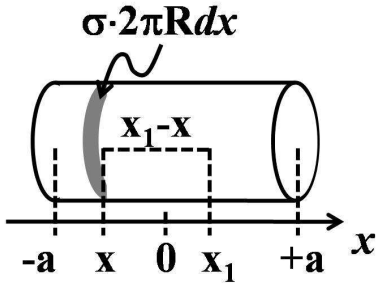
Sia data una spira quadrata di lato a, resistenza R e massa m, che viaggia con velocità v_0 verso una regione con campo magnetico B diverso da zero. Il campo magnetico è orientato perpendicolarmente alla spira (entrante nel foglio in figura) e, man mano che la spira entra nella regione con $B \neq 0$, mantiene la sua orientazione perpendicolare al campo. Detti $x=0$ e $t=0$ rispettivamente la posizione e il tempo in cui la spira inizia ad entrare nella regione con $B \neq 0$, si trovi (in assenza di attriti):

1) un'espressione per la velocità in funzione del tempo, $v(t)$, e per la posizione in funzione del tempo, $x(t)$, per la fase di ingresso della spira nel campo magnetico B;
2) la velocità iniziale minima v_0, detta $v_{0,min}$, con cui la spira riesce ad entrare completamente nella regione $B \neq 0$;
3) nel caso la velocità v_0 sia quella del punto 2), determinare l'energia totale dissipata per effetto Joule sulla spira durante il suo ingresso nella regione $B \neq 0$.



Si esprimano i risultati in funzione di a, R, m, v_0 e B.

Soluzione problema 1



Con riferimento alla figura, si scelga l'asse x parallelo all'asse del cilindro e avente origine nel centro del cilindro. Si vuole calcolare il campo elettrico nel punto generico x_1 dell'asse del cilindro. La distribuzione di carica superficiale sulla parete laterale del cilindro possiamo immaginarla costituita da tanti anelli di spessore infinitesimo dx. Ciascuno di questi anelli porta una carica pari a $\sigma \cdot 2\pi R dx$, dove $2\pi R dx$ non è altro che l'area laterale di ciascun anello infinitesimo. Il campo elettrico lungo l'asse del cilindro è quindi la somma dei campi elettrici generati da tutti questi anelli infinitesimi sul prorpio asse. Il campo elettrico generato da un qualsiasi anello carico filiforme è noto essere parallelo all'asse dell'anello e di intensità pari a:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{\left[z^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

dove Q è la carica totale sull'anello e z il punto dell'asse su cui stiamo calcolando il campo elettrico. Nel presente caso, la carica totale su ciascun anello infinitesimo è pari a $\sigma \cdot 2\pi R dx$, mentre la distanza z a cui stiamo calcolando il campo elettrico è pari a x_1-x, con x posizione del generico anello infinitesimo. Di conseguenza il campo elettrico infinitesimo dE, parallelo all'asse del cilindro, sarà dato da:

$$dE = \frac{\sigma 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x_1 - x)dx}{\left[(x_1 - x)^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

Integrando fra $x=-a$ e $x=+a$ si ottiene che il campo totale E generato nel generico punto x_1 dell'asse è dato da:

$$E = \frac{\sigma 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{(x_1 - x)dx}{\left[(x_1 - x)^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

$$E = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\left[(x_1 - x)^2 + R^2\right]^{1/2}} \right]_{-a}^{+a}$$

$$E = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\left[(x_1 - a)^2 + R^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{\left[(x_1 + a)^2 + R^2\right]^{1/2}} \right]$$

Soluzione problema 2

L'anello filiforme di carica totale $+Q$ produce un campo elettrico E a distanza generica x, lungo l'asse dell'anello, dato da:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{\left[x^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

La forza repulsiva F sperimentata dalla carica $+q$ sarà data dal prodotto $+q \cdot E$, sostituendo in E la distanza x_0 al posto della generica distanza x:

$$F = qE = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x_0}{\left[x_0^2 + R^2\right]^{3/2}}$$

Per determinare la velocità minima necessaria a raggiungere il centro dell'anello, applichiamo la conservazione dell'energia. Nel punto iniziale, a distanza x_0, la carica $+q$ possiede energia cinetica iniziale, K_0, e energia potenziale elettrostatica iniziale, U_0. Per calcolare l'energia elettrostatica consideriamo il

potenziale elettrostatico V_0 generato dall'anello lungo l'asse e lo moltiplichiamo per il valore della carica $+q$, $U=+q\cdot V$. In formule abbiamo le seguenti espressioni:

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$U_0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

dove E_0 è l'energia iniziale della particella $+q$. Per calcolare la velocità minima necessaria ad arrivare al centro dell'anello, imponiamo che l'energia cinetica sia nulla nel centro dell'anello. L'energia totale finale E_1 è allora:

$$K_1 = 0$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_1 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$E_1 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Per la conservazione dell'energia dobbiamo avere $E_0=E_1$, da cui segue che:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2m\pi\varepsilon_0 R}\left[1 - \frac{1}{\left(x_0^2/R^2 + 1\right)^{1/2}}\right]}$$

L'ultima espressione scritta per v_0 costituisce la velocità minima, $v_{0,min}$, cercata.

Nel caso la particella m abbia carica $-q$, essa risente di una forza attrattiva nei confronti dell'anello con carica positiva $+Q$. Nel momento in cui essa viene lanciata lontana dal centro dell'anello con velocità v_0, la sua energia totale iniziale, E_0, sarà come nel caso precedente la somma dell'energia cinetica iniziale K_0 e dell'energia potenziale elettrostatica iniziale U_0:

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$U_0 = \frac{-qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

Per trovare la velocità di fuga imponiamo che la particella abbia, a distanza infinita dall'anello, energia cinetica pari a zero, mentre la sua energia potenziale elettrostatica sarà pari a zero a causa della distanza infinita dall'anello. Quindi l'energia finale totale E_1=0 a distanza infinita dall'anello, se la velocità iniziale è appena sufficiente a fuggire dal campo elettrostatico. Imponendo la conservazione dell'energia, E_0=E_1, si ottiene la velocità di fuga:

$$E_0 = E_1 = 0$$

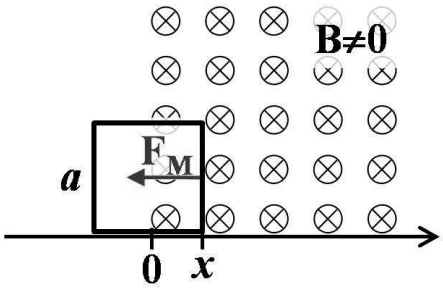
$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}} = 0$$

$$v_0^2 = \frac{qQ}{2m\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{qQ}{2m\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + R^2\right]^{1/2}}}$$

L'ultima espressione scritta per v_0 costituisce la velocità di fuga della particella dall'anello carico.

Soluzione problema 3



Punto 1): Man mano che la spira entra nella regione con $B\neq0$ si ha una variazione del flusso di B associato alla spira, e pertanto si avranno una forza elettromotrice indotta, f_i, e una corrente indotta, I. Il flusso di B al variare della posizione x è dato da:

$$\Phi(B) = Bax$$

da cui segue che la forza elettromotrice indotta è:

$$f_i = \left|\frac{d\Phi(B)}{dt}\right| = Ba\frac{dx}{dt} = Bav$$

dove v è la velocità istantanea della spira. La corrente indotta istantanea sarà pari a:

$$I = \frac{f_i}{R} = \frac{Bav}{R}$$

e circolerà in senso antiorario in figura, per compensare la variazione di flusso $\Phi(B)$. Dato che ora è presente una corrente che circola sulla spira e parte di essa è immersa in un campo magnetico si avrà una forza meccanica di origine magnetica, F_M=$I\mathbf{dl}\times\mathbf{B}$, che agisce sui tratti di spira immersi in $B\neq0$. Sul lato superiore e inferiore della spira le due forze sono uguali in modulo e opposte in verso, per cui si annullano. Rimane solo la forza agente sul lato destro della spira e, dato che la corrente I gira in senso antiorario, il verso della forza F_M è diretto verso sinistra nella figura (ovvero si oppone all'ingresso della spira e ne riduce la velocità):

$$F_M = -IaB = -\frac{B^2a^2v}{R}$$

dove il segno "-" tiene conto del fatto che si tratta di una forza che si oppone al verso positivo delle x considerato in figura. Dato che la massa m della spira è nota, possiamo scrivere il II principio della dinamica, applicato alla spira, come segue:

$$ma = F_M$$

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2a^2v}{R}$$

Riarrangiando l'espressione appena scritta e integrando si ottiene la dipendenza di v dal tempo t:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2a^2}{mR}dt$$

$$\int_{v0}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2a^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{B^2a^2}{mR}t$$

$$v(t) = v_0\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right)$$

Dall'ultima espressione si può ricavare la dipendenza di x dal tempo t, considerando che $v(t)=dx/dt$:

$$\frac{dx}{dt} = v_0\exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right)$$

$$\int_0^x dx = v_0\int_0^t \exp\left(-\frac{B^2a^2}{mR}t\right)dt$$

$$x(t) = v_0\left[\frac{\exp\left(-B^2a^2t/mR\right)}{-B^2a^2/mR}\right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{v_0mR}{B^2a^2}\left[1-\exp\left(-\frac{B^2a^2t}{mR}\right)\right]$$

Le espressioni appena trovate per $v(t)$ e $x(t)$ valgono solo nella fase di ingresso della spira nella regione con $B\neq0$, mentre non appena la spira è completamente entrata in tale regione non si ha più alcuna variazione di $\Phi(B)$ e pertanto non ci sono più forza elettromotrice indotta e corrente circolante nella spira, da cui segue che $F_M=0$.

Punto 2): L'ultima espressione scritta per $x(t)$ è una funzione esponenziale che tende ad un valore asintotico per $t\rightarrow\infty$:

$$x(t\rightarrow\infty) = \frac{v_0mR}{B^2a^2}$$

Questo rappresenta il massimo valore di x raggiungibile dalla spira nel caso in cui la fase di ingresso all'interno della regione con $B\neq0$ si prolunghi per un tempo molto lungo, idealmente per un tempo che tende a ∞. Questa situazione si verifica però solo nel caso in cui la velocità iniziale v_0 sia appena sufficiente, o insufficiente, a produrre l'ingresso totale della spira. Nel primo caso, cioè di v_0 appena sufficiente all'ingresso della spira nella regione con $B\neq0$, imponendo $x(t\rightarrow\infty)=a$ (lato della spira) si ottiene il valore minimo di v_0, $v_{0,min}$, affinchè la spira entri completamente nella regione con $B\neq0$ (anche se avrà bisogno di un tempo virtualmente ∞ per compiere tale operazione):

$$a = \frac{v_0mR}{B^2a^2}$$

$$v_{0,\min} = \frac{B^2a^3}{mR}$$

Punto 3): La potenza istantanea dissipata per effetto Joule, P_J, è data da:

$$P_J = I^2R = \left(\frac{Bav}{R}\right)^2\cdot R = \frac{B^2a^2v^2}{R}$$

Integrando questa espressione nel tempo otteniamo l'energia dissipata per effetto Joule, W_J:

$$W_J(t) = \int_0^t P_J\,dt = \frac{B^2a^2}{R}\int_0^t v^2 dt = \frac{B^2a^2}{R}\int_0^t v^2 dt$$

Nell'ultima espressione dobbiamo sostituire a v l'espressione di $v(t)$ trovata al punto 1):

$$W_J(t) = \frac{B^2a^2}{R}\int_0^t v_0^2 \exp\left(-\frac{2B^2a^2}{mR}t\right)dt$$

$$W_J(t) = \frac{B^2a^2v_0^2}{R}\left[\frac{\exp\left(-2B^2a^2t/mR\right)}{-2B^2a^2/mR}\right]_0^t$$

$$W_J(t) = \frac{mv_0^2}{2}\left[1-\exp\left(\frac{-2B^2a^2t}{mR}\right)\right]$$

Nell'ultima espressione trovata, che è l'energia dissipata per effetto Joule al trascorrere del tempo t, bisogna sostituire $t\rightarrow\infty$ perché stiamo calcolando l'energia totale dissipata nel caso in cui la velocità iniziale v_0 sia il minimo necessario affinché la spira entri completamente nella regione con $B\neq 0$ (e in tale caso, come visto al punto 2), è necessario un tempo virtualmente ∞):

$$W_J(t\rightarrow\infty) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Quest'ultimo risultato ci dice che l'energia dissipata per effetto Joule non è altro che l'energia cinetica (ovvero l'energia meccanica) posseduta dalla spira prima di entrare nella regione con $B\neq 0$. Sostituendo a v_0 l'espressione trovata al punto 2) si ha l'energia dissipata per effetto Joule nel caso in cui $v_0=v_{0,min}$:

$$W_J = \frac{1}{2}mv_{0,\min}^2 = \frac{1}{2m}\cdot\left(\frac{B^2a^3}{R}\right)^2$$