Risultati esame scritto Fisica 2 - 20/09/2012
orali: 26-09-2012 alle ore 9.30 presso aula R

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale;

Nuovo ordinamento

	voto	
LIMARDI	28	ammesso
MASTROIANNI L.	14	
MERCURIO	nc	
MIRARCHI	nc	
SILIPO	11	

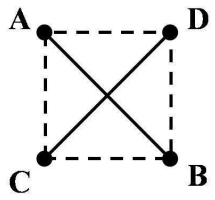
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 20/09/2012

Problema 1

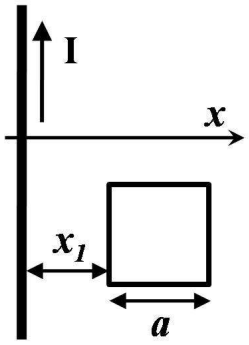
Due cariche positive sono poste ai lati del segmento AB rappresentato in figura, mentre due cariche negative sono poste ai lati del segmento CD. Complessivamente le cariche positive e negative occupano i vertici di un quadrato di lato a. Tutte le cariche sono in modulo pari a q. Calcolare l'energia elettrostatica del sistema di cariche e il lavoro speso per portare i due segmenti a distanza infinita l'uno dall'altro.



Problema 2

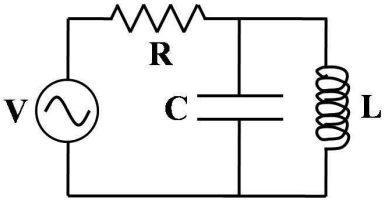
Sia dato un filo infinito percorso da corrente I ed una spira conduttrice quadrata di lato a che giace nel piano del filo infinito, con uno dei lati paralleli al filo (vedi figura). Inizialmente la spira è in quiete col lato più vicino al filo a distanza x_1 dal filo stesso. In queste condizioni si determini il flusso del campo magnetico, generato dal filo, attraverso la spira quadrata (si esprima il risultato in funzione di I, a e x_1).

Si supponga poi che la spira si muova lungo la direzione dell'asse x, mantenendo la sua orientazione parallela al filo infinito. Il moto della spira è tale che la distanza x_1, fra il filo e il lato della spira più vicino al filo, obbedisca alla legge oraria $x_1(t)=a\cdot e^{kt}$, con k costante (le cui dimensioni sono pari all'inverso del tempo t). Detta R la resistenza elettrica della spira, si determini la corrente I_S circolante nella spira quando essa è in moto. Si analizzi il caso di $t\rightarrow\infty$ per $k>0$ e $k<0$, determinando il valore e verso della corrente (si esprimano i risultati in funzione di I, a, R, k e t).



Problema 3

Nel circuito in figura sono noti la resistenza R, l'induttanza L e la capacità C. E' inoltre noto che il generatore di tensione alternata (sinusoidale) ha pulsazione pari a ω e ampiezza di oscillazione pari a V_0. Si determini l'impedenza complessa totale del circuito, Z_{TOT}, e la corrente erogata dal generatore (ampiezza e fase). Si determini inoltre l'ampiezza della corrente che circola nell'induttanza L. Si determini infine il valore della pulsazione ω per cui risulta nulla la corrente erogata dal generatore. Si esprimano i risultati in funzione di R, L, C, V_0 e ω.



Soluzione problema 1

L'energia elettrostatica del sistema di cariche è data dall'energia dei singoli segmenti più l'energia di interazione fra le cariche dei due segmenti. Per quanto riguarda il segmento AB, l'energia elettrostatica U_1 ad esso associata è data da:

$$U_1 = \frac{q_A \cdot q_B}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

dove $a\cdot\sqrt{2}$ non è altro che la distanza che c'è fra le due cariche positive. Un uguale risultato si ottiene per l'energia elettrostatica del segmento CD.

Per l'energia di interazione fra i due segmenti calcoliamo prima di tutto l'interazione della carica in A con le cariche negative:

$$U_{AC} = \frac{q_A \cdot q_C}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a} = \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = U_{AD}$$

Da cui segue che tutta l'energia di interazione della carica in A con le cariche negative è pari a:

$$U_A = U_{AC} + U_{AD} = -2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Un uguale risultato si ottiene per l'energia di interazione U_B della carica in B, e l'energia totale di interazione U_2 è data dalla somma U_A+U_B:

$$U_2 = U_A + U_B = -2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - 2 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -4 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

L'energia totale, U, del sistema sarà data allora dalle energie dei singoli segmenti, $2\cdot U_1$, più l'energia di interazione, U_2:

$$U = 2 \cdot U_1 + U_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} - 4 \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 4\right) \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

Quando i due segmenti sono portati a distanza infinita uno dall'altro, nell'energia totale del sistema non c'è più l'energia di interazione e U=2·U_1. Per cui il lavoro fatto dall'esterno, L_{est}, per allontanare i due segmenti è pari a:

$$L_{est} = -U_2 = +4\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}$$

Soluzione problema 2

Il campo magnetico generato da un filo infinito è tangente alla circonferenza perpendicolare al filo e avente il centro nella posizione del filo, mentre il suo modulo è pari a $B=\mu_0 I/(2\pi x)$ dove x è la distanza dal filo. Nel presente caso si ha allora un campo magnetico entrante nella spira, facendo riferimento alla figura del problema, la cui intensità decresce man mano che ci allontaniamo dal filo. In particolare si ha allora un campo magnetico non uniforme all'interno della spira. Per calcolarne il flusso attraverso la spira, consideriamo una porzione infinitesima di spira di lunghezza a nella direzione perpendicolare all'asse x e di larghezza infinitesima dx. Su tale porzione possiamo approssimare il campo magnetico come uniforme e abbiamo allora un flusso infinitesimo $d\Phi(B)$:

$$d\Phi(B) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} a \cdot dx$$

Il flusso attraverso tutta la spira sarà dato dalla somma di tutti questi contributi infinitesimi; passiamo allora all'integrale dell'espressione precedente calcolato fra il punto iniziale della spira, x_1, e il punto finale, x_1+a:

$$\Phi(B)=\int d\Phi(B)=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\cdot\int_{x1}^{x1+a}\frac{dx}{x}$$

$$\Phi(B)=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{x_1+a}{x_1}\right)$$

Nel caso in cui la spira sia in movimento rispetto al filo, avremo un flusso del campo magnetico che cambia nel tempo e quindi, per la legge di Faraday-Neumann, sarà presente una forza elettromotrice indotta, f_i. Nota l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso la spira e la legge oraria con cui varia x_1, è sufficiente sostituire tale legge oraria ad x_1 per avere un'espressione del flusso $\Phi(B)$ dipendente dal tempo:

$$\Phi(B)=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(\frac{a\mathrm{e}^{kt}+a}{a\mathrm{e}^{kt}}\right)$$

$$\Phi(B)=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-kt}\right)$$

Applichiamo la legge di Faraday-Neumann e calcoliamo il modulo della forza elettromotrice indotta f_i come derivata rispetto al tempo dell'ultima espressione scritta:

$$f_i=\left|\frac{d\Phi(B)}{dt}\right|=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\left|\frac{d\left[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-kt}\right)\right]}{dt}\right|$$

$$f_i=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\cdot\left|\frac{-k\mathrm{e}^{-kt}}{1+\mathrm{e}^{-kt}}\right|$$

$$f_i=\frac{\mu_0 Iak}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{+kt}}$$

Nota la forza elettromotrice indotta f_i e la resitenza della spira R, possiamo calcolare la corrente circolante nella spira invertendo la legge di Ohm, $f_i=R\cdot I_S$:

$$I_S=\frac{f_i}{R}=\frac{\mu_0 Iak}{2\pi R}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{e}^{+kt}}$$

Per $k>0$ la legge oraria ci dice che la spira si sta allontanando dal filo infinito. Il flusso entrante del campo magnetico diminuisce e pertanto per la legge di Lenz si avrà una corrente circolante in senso orario nella figura del problema. Per $t\to\infty$ vediamo dall'ultima espressione scritta che il denominatore $\to\infty$ e pertanto la corrente nella spira $\to 0$.

Invece per $k<0$ la legge oraria ci dice che la spira si sta avvicinando al filo, senza però raggiungerlo mai. Infatti per $t\to\infty$ si ha che $x_1\to 0$. Dato che la spira si sta avvicinando al filo, si ha un flusso entrante del campo magnetico che aumenta nel tempo, e per la legge di Lenz la corrente che circola nella spira ha verso antiorario nella figura del problema. Inoltre per $k<0$ si ha la seguente relazione:

$$k<0;\quad \frac{1}{1+\mathrm{e}^{kt}}\xrightarrow[t\to\infty]{}1$$

e come conseguenza la corrente I_S circolante nella spira tende al seguente valore per $t\to\infty$:

$$I_S\to\frac{\mu_0 Ia|k|}{2\pi R}$$

Soluzione problema 3

Nel circuito in questione si hanno induttanza e condensatore collegati in parallelo. Dato che per le impedenze in parallelo, il reciproco $1/Z_P$ è dato dalla somma dei reciproci delle singole impedenze, $1/Z_L + 1/Z_C$, abbiamo la seguente espressione per Z_P:

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{\omega C}{-j}$$

$$\frac{1}{Z_P} = \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega L}$$

$$Z_P = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

L'impedenza totale del circuito è la serie della resistenza R con Z_P, da cui segue che:

$$Z_{TOT} = Z_R + Z_P = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$Z_{TOT} = \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega L}{1-\omega^2 LC} = Z_0 \mathrm{e}^{j\varphi}$$

dove Z_0 e φ sono rispettivamente il modulo dell'impedenza complessa e la sua fase. Per ottenere l'espressione esplicita di Z_0 è necessario moltiplicare Z_{TOT} per il suo complesso coniugato e calcolarne la radice quadrata:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{TOT} \cdot Z_{TOT}^*} = \sqrt{\frac{R\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega L}{1-\omega^2 LC} \cdot \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right) - j\omega L}{1-\omega^2 LC}}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}}{1-\omega^2 LC}$$

Per la fase φ, il rapporto fra la parte immaginaria e la parte reale di Z_{TOT} fornisce la $\tan(\varphi)$:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right)}$$

Dalla legge di Ohm generalizzata per i fasori si ha che:

$$\vec{V} = Z_{TOT} \cdot \vec{I}$$

$$V_0 \mathrm{e}^{j\omega t} = Z_0 \mathrm{e}^{j\varphi} \cdot I_0 \mathrm{e}^{j\omega t} \mathrm{e}^{j\theta}$$

$$V_0 = Z_0 I_0; \quad \theta = -\varphi$$

dove θ è la fase della corrente I. Abbiamo allora che l'ampiezza I_0 della corrente e la sua fase θ sono date da:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0\left(1-\omega^2 LC\right)}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\tan(\theta) = \tan(-\varphi) = \frac{-\omega L}{R\left(1-\omega^2 LC\right)}$$

Per trovare l'ampiezza della corrente circolante nell'induttanza, applichiamo la legge di Ohm generalizzata ai fasori di tensione e corrente ai capi dell'induttanza:

$$\vec{V}_L = Z_L \cdot \vec{I}_L$$

La tensione ai capi dell'induttanza è la stessa che c'è ai capi del condensatore ed è pari alla tensione V_P ai capi del parallelo delle impedenze. Sempre applicando la legge di Ohm generalizzata al parallelo delle impedenze, si ottiene:

$$\vec{V}_P = Z_P \cdot \vec{I} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \cdot \vec{I}$$

dove I è la corrente circolante nel circuito determinata sopra. Dato che $V_P = V_L$, dalle relazioni appena scritte si ottiene la seguente espressione per I_L:

$$\vec{I}_L = \frac{\vec{V}_L}{Z_L} = \frac{\vec{V}_P}{Z_L}$$

$$\vec{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \cdot \vec{I} = \frac{\vec{I}}{1-\omega^2 LC}$$

Dall'ultima relazione scritta si vede che l'ampiezza della corrente ai capi dell'induttanza, I_{0L}, è pari all'ampiezza della corrente circolante nel circuito, I_0, per il fattore $1/(1-\omega^2 LC)$:

$$I_{0L} = \frac{1}{1-\omega^2 LC}\frac{V_0\left(1-\omega^2 LC\right)}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}}$$

Infine, dall'espressione trovata per l'ampiezza I_0 della corrente circolante nel circuito, si vede subito che la corrente è pari a zero quando è nullo il numeratore:

$$1-\omega^2 LC = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La condizione appena trovata prende il nome di condizione di *antirisonanza*, in opposizione al fenomeno della risonanza nei circuiti a corrente alternata.