Risultati esame scritto Fisica 2 - 10/03/2014
orali: 14-03-2014 alle ore 9.30 presso aula G8

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale;

Nuovo ordinamento

		voto	
AMATO	MATTIA	17	ammesso
BARONE	ROBERTO	11	
CASELLA	ALESSANDRO	nc	
OLIVERIO	MARTA	10	
SCUMACI	CRISTINA	15	

nc = non classificato

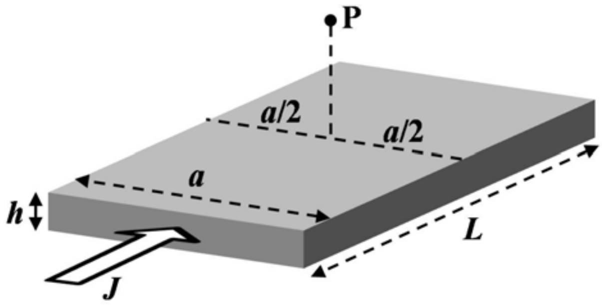
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 10/03/2014

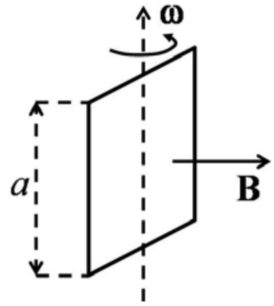
Problema 1

Sia dato un nastro conduttore, di spessore h, larghezza a e lunghezza L, con $a,L >> h$. Il nastro è percorso da una densità di corrente J uniforme attraverso la sezione ah e parallela alla lunghezza L (vedi figura). Si calcoli il campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) in un punto P al di sopra del nastro, equidistante dai bordi del nastro stesso (vedi figura) e nel limite di $a,L \rightarrow \infty$.
[Si esprima il risultato in funzione dei parametri del problema e della permeabilità magnetica del vuoto, μ_0]



Problema 2

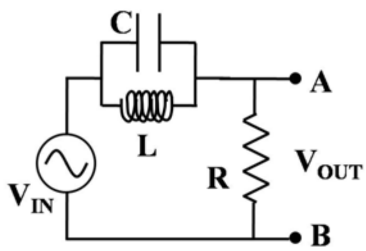
Sia data una spira conduttrice quadrata di lato a, immersa in un campo magnetico uniforme e costante nel tempo, di modulo pari a B, perpendicolare alla superficie della spira all'istante iniziale t=0sec. Successivamente la spira è messa in rotazione con velocità angolare ω costante ad opera di un momento torcente esterno, non costante nel tempo. Come rappresentato in figura, l'asse di rotazione passa per il centro della spira ed è parallelo ad un lato della spira.



1) Determinare un'espressione per la forza elettromotice indotta, f_i, in funzione del tempo t (si esprima il risultato in funzione di B, a, ω e ovviamente t)
2) Sapendo che la carica totale ΔQ attraversa la spira fra l'istante iniziale t=0sec e t=T/2, con T periodo di rivoluzione della spira, determinare la resistenza elettrica R della spira (si esprima il risultato in funzione di B, a, ΔQ)
3) Usando il risultato del punto 2), si determini un'espressione per il momento torcente esterno, M, che mantiene la spira in rotazione (si esprima il risultato in funzione di B, a, ΔQ, ω, e ovviamente il tempo t)

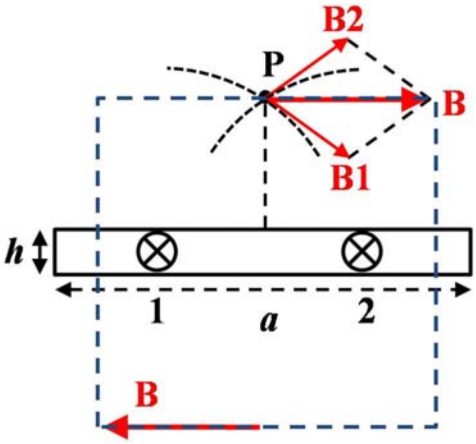
Problema 3

Sia dato il circuito in figura alimentato con un generatore di tensione alternata, la cui ampiezza di tensione è $V_{0,IN}$ e con pulsazione ω. Sono noti i valori della capacità C, dell'induttanza L e della resistenza R. Ai capi della resistenza R viene misurata la tensione di uscita V_{OUT}, fra i morsetti indicati con le lettere A e B.



1) Si determini l'espressione del modulo Z_0 dell'impedenza complessa totale, data dal parallelo di L e C in serie con R (si esprima il risultato in funzione di R, L, C e ω)
2) Si determini il rapporto fra l'ampiezza della tensione di uscita e quella della tensione di ingresso, $V_{0,OUT}/V_{0,IN}$ (si esprima il risultato in funzione di R, L, C e ω)
3) Si determini il valore asintotico del rapporto $V_{0,OUT}/V_{0,IN}$ per $\omega \rightarrow 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$; per quale valore di ω tale rapporto è pari a zero?

Soluzione problema 1



Consideriamo una porzione infinitesima della sezione trasversale del nastro conduttore, indicata con il numero 1 in figura. In corrispondenza di questa porzione infinitesima, abbiamo una corrente entrante nella sezione del nastro conduttore. Questa corrente, data la lunghezza infinita di *L*, può essere assimilata ad un filo infinito percorso da corrente che genera nel punto P un campo magnetico $\mathbf{B_1}$.
Il campo magnetico generato da un filo infinito è dato da:

$$\mathbf{B_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\mathbf{t}}$$

dove $I=J \cdot h \cdot dx$ è la corrente passante nella porzione 1 di altezza *h* e larghezza *dx*, *R* è la distanza fra la porzione 1 e il punto P, **t** è il versore tangente alla circonferenza avente 1 come centro e che gira in senso antiorario intorno alla corrente 1 (quindi in senso orario in figura, dato che la corrente è entrante nel piano del foglio). Dato che il punto P è equidistante dai bordi del nastro, per ogni corrente 1 considerata sul lato sinistro di P in figura, esiste una corrente 2 sul lato destro, alla stessa distanza dal punto P. Pertanto essa genera un campo $\mathbf{B_2}$ dato da:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\hat{\mathbf{t}}$$

Dato che *R* è lo stesso sia per 1 che per 2, e anche la corrente *I* è la stessa (prendendo lo stesso *dx* per 1 e per 2), si ha che $\mathbf{B_1}$ e $\mathbf{B_2}$ sono uguali in modulo. Come si vede dalla figura, le loro componenti perpendicolari al nastro si annullano reciprocamente, mentre le componenti parallele al nastro si sommano. Possiamo ripetere questo ragionamento per tutte le porzioni di nastro sulla sinistra di P in figura: per ciascuna di esse esiste una porzione sul lato destro percorsa dalla stessa corrente e alla stessa distanza da P. Pertanto l'unica componente del campo magnetico che sopravvive è orizzontale in figura, ovvero parallela alla superficie del nastro, perpendicolare alla direzione della densità di corrente *J* e diretta verso destra in figura.
Dato che assumiamo che la larghezza del nastro $a \rightarrow \infty$, questo stesso discorso possiamo ripeterlo per qualsiasi punto P al di sopra del nastro, e se siamo alla stessa distanza dal nastro per motivi di simmetria avremo che il campo **B** sarà lo stesso per tutti i punti alla stessa distanza. Se consideriamo i punti al di sotto del nastro e alla stessa di stanza di P dal nastro, le argomentazioni rimangono del tutto simili e il risultato è che il campo **B** è lo setesso in modulo ma diretto verso sinistra in figura.
Applichiamo allora il teorema di Ampere per calcolare la circuitazione del campo magnetico **B**. Per la circuitazione scegliamo un percorso rettangolare (tratteggiato in blu in figura), passante per il punto P, avente due lati di lunghezza *l* paralleli al nastro e equidistanti dal nastro (uno sopra e uno sotto) e gli altri due lati perpendicolari al nastro. Per quanto visto sopra, sui lati orizzontali il campo magnetico è parallelo al cammino considerato, mentre sui lati verticali il campo magnetico è perpendicolare al cammino. La circuitazione di **B** è allora:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = 2Bl$$

Il teorema di Ampere afferma che:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

dove I_{CONC} è la corrente concantenata al cammino. Nel nostro caso si ottiene allora che:

$$2Bl = \mu_0 I_{CONC} = \mu_0 Jhl$$

$$B = \frac{\mu_0 Jh}{2}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Detto θ l'angolo che il vettore **S** superficie della spira forma col campo magnetico **B** al generico istante t, si ha che il flusso del campo magnetico $\Phi(B)$ attraverso la spira è dato da:

$$\Phi(B) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = Ba^2 \cos(\theta)$$

$$\Phi(B) = Ba^2 \cos(\omega t)$$

dove si è tenuto conto del fatto che $\theta(t)=\omega\cdot t$. Applichiamo la legge dell'induzione di Faraday e otteniamo la forza elettromotrice indotta, f_i:

$$f_i = \left|\frac{d\Phi(B)}{dt}\right| = \left|Ba^2 \frac{d\cos(\omega t)}{dt}\right| = Ba^2 \omega \sin(\omega t)$$

Punto 2): La carica ΔQ che attraversa la spira fra t=0sec e $t=T/2$ è legata alla corrente I circolante nella spira a causa della forza elettromotrice indotta f_i. Integrando nel tempo si ottiene che:

$$\Delta Q = \int_0^{T/2} I dt = \int_0^{T/2} \frac{f_i}{R} dt$$

$$\Delta Q = \frac{Ba^2 \omega}{R} \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt$$

$$\Delta Q = \frac{Ba^2 \omega}{R} \left[- \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right]_0^{T/2}$$

$$\Delta Q = \frac{Ba^2}{R} \left[-\cos(\omega t) \right]_0^{T/2}$$

$$\Delta Q = 2 \frac{Ba^2}{R}$$

dove si è tenuto conto del fatto che per $t=T/2$ si ha $\omega t=\pi$ (da cui il fattore 2 come risultato dell'integrale definito). Per la resistenza R ne segue allora la seguente espressione:

$$R = \frac{2Ba^2}{\Delta Q}$$

Punto 3): Il momento torcente esterno M mantiene la spira in rotazione con velocità angolare ω costante. Questo vuol dire che l'energia cinetica della spira non aumenta, e di conseguenza tutta la potenza meccanica W_M fornita dal momento torcente M viene dissipata per effetto Joule, W_J. Si possono allora uguagliare istante per istante W_M e W_J:

$$W_M = W_J$$

$$M\omega = I^2 R$$

$$M\omega = \left(\frac{f_i}{R}\right)^2 R$$

$$M\omega = f_i^2 \cdot \frac{1}{R} = \left[Ba^2 \omega \sin(\omega t)\right]^2 \cdot \frac{\Delta Q}{2Ba^2}$$

$$M = B^2 a^4 \omega^2 \sin^2(\omega t) \cdot \frac{\Delta Q}{2Ba^2} \cdot \frac{1}{\omega}$$

$$M = \frac{\Delta Q}{2} Ba^2 \omega \sin^2(\omega t)$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Prima di tutto calcoliamo l'impedenza complessa data dal parallelo di L con C, Z_{LC}:

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1}{j\omega L} - \frac{\omega C}{j}$$

$$\frac{1}{Z_{LC}} = \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega L}$$

$$Z_{LC} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

L'impedenza totale complessa, Z_{TOT}, è data dalla seri di R con Z_{LC} e avremo quindi che:

$$Z_{TOT} = R + Z_{LC} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$Z_{TOT} = R + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$Z_{TOT} = \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

Per calcolare il modulo Z_0 dell'impedenza totale complessa, Z_{TOT}, moltiplichiamo per il suo complesso coniugato e ne facciamo la radice quadrata:

$$Z_0 = \sqrt{Z_{TOT} \cdot Z^*_{TOT}}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\left[R\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega L\right]\left[R\left(1-\omega^2 LC\right) - j\omega L\right]}}{\left|1-\omega^2 LC\right|}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2}}{\left|1-\omega^2 LC\right|}$$

Quindi possiamo esprimere l'impedenza totale complessa, Z_{TOT}, come: $Z_{TOT}= Z_0 \cdot e^{j\alpha}$ dove α è la fase dell'impedenza complessa data da $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{Im}(Z_{TOT})/\mathrm{Re}(Z_{TOT})$ (Im e Re sono rispettivamente la parte immaginaria e reale di un numero complesso).

Punto 2): Per calcolare l'ampiezza della tenasione di uscita $V_{0,OUT}$ dobbiamo calcolare la caduta di tensione ai capi della resistenza R; prima di tutto applichiamo il metodo simbolico a tutto il circuito per calcolare la corrente che circola in R:

$$\vec{V}_{IN} = Z_{TOT}\vec{I}$$

$$V_{0,IN} e^{j\omega t} e^{j\phi} = Z_0 e^{j\alpha} I_0 e^{j\omega t}$$

dove I_0 è l'ampiezza della corrente, ϕ e α rispettivamente la fase della tensione di ingresso e la fase dell'impedenza totale complessa, Z_{TOT}. Per quanto riguarda le ampiezze delle grandezze oscillanti segue quindi la seguente relazione:

$$V_{0,IN} = Z_0 I_0$$

$$I_0 = \frac{V_{0,IN}}{Z_0}$$

Nota la corrente $I=I_0 e^{j\omega t}$ possiamo calcolare al caduta di tensione ai capi di R:

$$\vec{V}_{OUT} = Z_R \vec{I}$$

$$V_{0,OUT} e^{j\omega t} = R I_0 e^{j\omega t}$$

da cui segue per le ampiezze che:

$$V_{0,OUT} = R I_0$$

Sostituendo in quest'ultima espressione quella trovata per I_0 si ha che:

$$V_{0,OUT} = R\frac{V_{0,IN}}{Z_0}$$

$$\frac{V_{0,OUT}}{V_{0,IN}} = \frac{R}{Z_0}$$

Utilizzando il valore Z_0 trovato al punto 1) si ottiene la seguente espressione per il rapporto $V_{0,OUT}/ V_{0,IN}$:

$$\frac{V_{0,OUT}}{V_{0,IN}} = \frac{R\cdot\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 L^2}}$$

Punto 3): Facciamo il limite per $\omega\to 0$ dell'ultima espressione:

$$\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{V_{0,OUT}}{V_{0,IN}}\right) = \lim_{\omega\to 0}\frac{R\cdot\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2}} = 1$$

Facciamo ora il limite per $\omega\to\infty$ sempre di $V_{0,OUT}/ V_{0,IN}$:

$$\lim_{\omega\to \infty}\left(\frac{V_{0,OUT}}{V_{0,IN}}\right) = \lim_{\omega\to \infty}\frac{R\cdot\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 L^2}} \to \frac{R\omega^2 LC}{\sqrt{R^2\omega^4 L^2 C^2}} \to \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4}} \to 1$$

Quindi sia per basse frequenze ($\omega\to 0$) sia per alte frequenze ($\omega\to\infty$) il presente circuito lascia passare il segnale di ingresso senza attenuazione o amplificazione. Invece c'è un valore di ω per cui il presente circuito attenua completamente il segnale di ingresso, comportandosi così come un filtro "elimina banda". Il valore di ω filtrato è quello per cui $V_{0,OUT}/ V_{0,IN}=0$:

$$\frac{V_{0,OUT}}{V_{0,IN}} = 0$$

$$\frac{R\cdot\left|1-\omega^2 LC\right|}{\sqrt{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2+\omega^2 L^2}} = 0 \to 1-\omega^2 LC = 0$$

$$\omega^2 LC = 1$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$