Risultati esame scritto Fisica 2 - 21/07/2014
orali: 25-07-2014 alle ore 9.30 presso aula G7

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

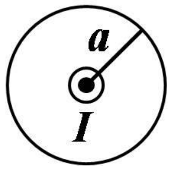
		voto	
AIELLO	ANTONELLA	nc	
ARCOBELLI	VALERIO	nc	
BARONE	ROBERTO	11	
BIANCO	TOMMASO	25	ammesso
CARCHEDI	GIUSY	nc	
CARUSO	FRACESCA	nc	
CIACCI	MARCO FEDELE	20	ammesso
COPPOLETTA	ANNA	13	
CORTESE	GIULIA	nc	
COVANI	DEMETRIO	14	
CURCIO	TOMMASO	11	
DE MASI	GIADA	17	ammesso
FERRARI	FRANCESCO	nc	
GALUPPO	MANUEL	nc	
GRAMUGLIA	RICCARDO	11	
GRILLO	TERESA	nc	
LIUZZI	SALVATORE	15	
MARINO	MARIA TERESA	28	ammesso
MASCIARI	MATTEO	15	
MERCURIO	ILARIA	11	
PAONESSA	MARTINA	nc	
RENDA	DOMENICO	nc	
SERGI	CARLA	10	
TRAPASSO	SERENA	nc	
TURANO	VINCENZA	nc	
URSINI	ANDREA	14	
VATRANO	ANTONIO	nc	
VATRELLA	VALERIANO	nc	

Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 21/07/2014

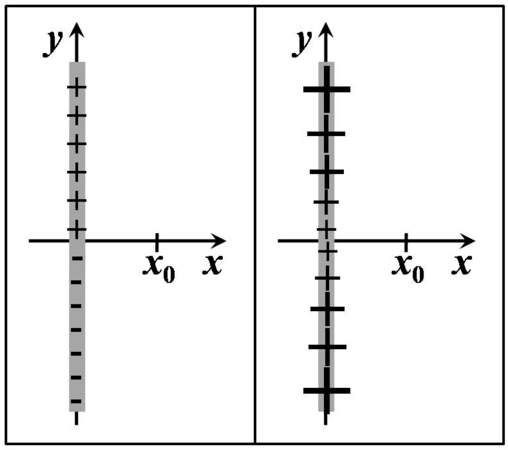
Problema 1



Sia dato un conduttore cilindrico infinito percorso da corrente I (in direzione normale alla sezione del conduttore) distribuita uniformemente nella sezione del conduttore. Noto il raggio a del cilindro, si calcoli il modulo del campo B all'interno e all'esterno del cilindro, in funzione della distanza r dall'asse del cilindro.
[Si esprimano tutti i risultati in funzione di μ_0, r, a, I]

Problema 2

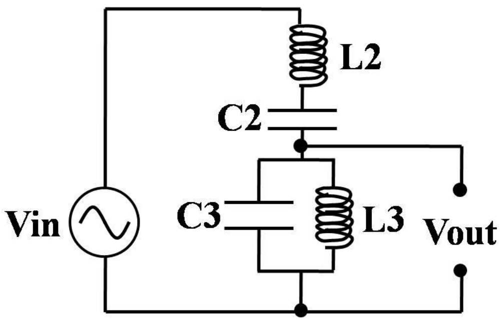
Sia dato un sistema di assi cartesiani xy e sia dato un filo infinito coincidente con l'asse y, con densità lineare di carica non uniforme, $\lambda=\lambda(y)$. Si calcoli il vettore campo elettrico **E** generato dal filo infinito lungo l'asse x, a distanza x_0 dall'origine degli assi (vedi figura), specificandone direzione, verso e modulo nei seguenti casi:



1) distribuzione di carica lineare $\lambda=\lambda_0 \cdot \mathrm{sign}(y)$, dove λ_0 è costante e sign(y) è la funzione che restituisce il segno di y (ovvero sign(y)=1 per yÓ0 e sign(y)=−1per $y<0$) [si esprima il risultato in funzione di ε_0, λ_0 e x_0]
2) distribuzione di carica lineare $\lambda=C_0 \cdot |y|$, dove C_0 è una costante di dimensioni opportune [C/m^2] e $|y|$ è il valore assoluto della coordinata y [si esprima il risultato in funzione di ε_0 e C_0]

Problema 3

Sia dato il circuito in figura, alimentato in regime alternato, di cui sono note le induttanze L_2 e L_3 e le capacità C_2 e C_3. La tensione alternata in ingresso, V_{IN}, ha pulsazione pari a ω e ampiezza pari a V_{IN0}.
1) Si determini l'impedenza complessa, Z_2, della serie L_2 C_2, l'impedenza complessa, Z_3, del parallelo L_3 C_3, e l'impedenza complessa totale, Z_{TOT}, del circuito
2) Detta V_{OUT} la tensione di uscita del circuito misurata ai capi del parallelo L_3 C_3 (vedi figura), si determini un'espressione per il rapporto V_{OUT0}/V_{IN0} fra le ampiezze delle tensioni di uscita e di ingresso
3) Si determini per quali valori della pulsazione ω tale rapporto è pari a 1
[Si esprimano tutti i risultati in funzione di ω, L_2, L_3, C_2, C_3]



Soluzione problema 1

Per motivi di simmetria, il campo magnetico B giace su circonferenze normali al conduttore (parallele alla sezione del conduttore), ed è punto per punto tangente a tali circonferenze e con verso antiorario nella figura del problema (analogamente a quanto accade per il campo magnetico generato da un filo infinito). Su ognuna di queste circonferenze di raggio r, il campo B ha modulo uniforme.

Considerando una circonferenza di raggio $r > a$ (esterno al conduttore) e applicando il teorema di Ampere a tale circonferenza si ottiene che:

$$\oint Bdl = \mu_0 I$$

$$2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{per } r > a$$

Per circonferenze di raggio $r < a$, si può continuare ad applicare il teorema di Ampere tenendo conto che la corrente all'interno della circonferenza non è pari a I (la corrente totale), ma ad una frazione di essa proporzionale alla sezione racchiusa dalla circonferenza (dato che la corrente I è uniformemente distribuita sulla sezione):

$$\oint Bdl = \mu_0 J \pi r^2 \qquad \text{con densità di corrente } J = \frac{I}{\pi a^2}$$

$$2\pi r B = \mu_0 J \pi r^2$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J r}{2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \qquad \text{per } r < a$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Nel caso di $\lambda=\lambda_0 \cdot \mathrm{sign}(y)$, il filo lungo il semiasse positivo delle y ha densità di carica lineare costante e pari a $+\lambda_0$, mentre lungo il semiasse negativo si ha $-\lambda_0$. Se consideriamo due elementi di filo, dy, diametralmente opposti all'asse x, essi generano un campo elettrico $d\mathbf{E}$ uguale in modulo, ma il tratto di filo sul semiasse positivo lo genera in direzione radiale uscente, mentre quello sul semiasse negativo lo genera in direzione radiale entrante. Facendo la loro somma vettoriale si ottiene un campo elettrico $d\mathbf{E}$ diretto verticalmente verso il basso. Possiamo ripetere lo stesso discorso per tutte le coppie di filo diametralmente opposte e sommando tutti questi campi elettrici si ottiene un campo elettico totale $\mathbf{E}$ diretto verticalmente verso il basso. Per calcolarne il modulo totale si consideri che l'elemento di filo dy genera nel punto $(x_0,0)$ il seguente campo in direzione radiale:

$$dE = \frac{\lambda_0 dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)}$$

Di tale campo a noi interessa solo la componente verticale dE_y, e moltiplichiamo allora per il $\sin(\theta)$ dove θ è l'angolo formato fra l'asse x e la direzione radiale di dE:

$$dE_y = \frac{\lambda_0 dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)} \sin(\theta)$$

$$dE_y = \frac{\lambda_0 dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)} \frac{y}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$dE_y = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ydy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\sin(\theta)=y/(x_0^2+y^2)^{1/2}$.
Un simile campo dE_y è prodotto anch'esso verso il basso dal tratto di filo dy diametralmente opposto, ovvero sull'asse negativo delle y. Tenendo conto di questi 2 contributi, ovvero moltiplicando per 2 il valore dE_y, e sommando su tutto il filo si ottiene il modulo del campo totale:

$$dE_y = 2\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{ydy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \int dE_y = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{ydy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{ydy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{1/2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Gli estremi di integrazione sono 0 e +Ð (invece di –Ð e +Ð), perchè abbiamo già considerato il contributo del filo sul semiasse negativo delle y moltiplicando per 2 il dE_y.

Punto 2): Nel caso di $\lambda=C_0\cdot|y|$, sia il filo lungo il semiasse positivo delle y che quello lungo il semiasse negativo hanno densità di carica positiva, a questa cresce al crescere del modulo di y. Se consideriamo due elementi di filo, dy, diametralmente opposti all'asse x, essi generano un campo elettrico ***d*E** uguale in modulo ed entrambi radialmente uscenti, ma il tratto di filo sul semiasse positivo lo genera verso il basso mentre quello sul semiasse negativo lo genera verso l'alto. Facendo la loro somma vettoriale si ottiene un campo elettrico ***d*E** diretto orizzontalmente verso destra nella figura del problema. Possiamo ripetere lo stesso discorso per tutte le coppie di filo diametralmente opposte e sommando tutti questi campi elettrici si ottiene un campo elettico totale **E** diretto orizzontalmente verso destra (parallelo e concorde all'asse x). Per calcolarne il modulo totale si consideri che l'elemento di filo dy genera nel punto $(x_0,0)$ il seguente campo in direzione radiale:

$$dE = \frac{C_0 ydy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)}$$

Di tale campo a noi interessa solo la componente orizzontale dE_x, e moltiplichiamo allora per il $\cos(\theta)$ dove θ è l'angolo formato fra l'asse x e la direzione radiale di dE:

$$dE_x = \frac{C_0 y dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)} \cos(\theta)$$

$$dE_x = \frac{C_0 y dy}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)} \frac{x_0}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{1/2}}$$

$$dE_x = \frac{C_0 x_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y dy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

dove si è sfruttato il fatto che $\cos(\theta)=x_0/(x_0^2+y^2)^{1/2}$.
Un simile campo dE_x è prodotto anch'esso verso destra dal tratto di filo dy diametralmente opposto, ovvero sull'asse negativo delle y. Tenendo conto di questi 2 contributi, ovvero moltiplicando per 2 il valore dE_x, e sommando su tutto il filo si ottiene il modulo del campo totale:

$$dE_x = 2\frac{C_0 x_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{y dy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \int dE_x = \int_0^{+\infty} \frac{C_0 x_0}{2\pi\varepsilon_0} \frac{y dy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \frac{C_0 x_0}{2\pi\varepsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{y dy}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{3/2}}$$

$$E_{TOT} = \frac{C_0 x_0}{2\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\left(x_0^2 + y^2\right)^{1/2}} \right]_0^{+\infty} = \frac{C_0}{2\pi\varepsilon_0}$$

Come prima, gli estremi di integrazione sono 0 e +Ð (invece di –Ð e +Ð), perchè abbiamo già considerato il contributo del filo sul semiasse negativo delle y moltiplicando per 2 il dE_x.

Soluzione problema 3

Punto 1): L'impedenza complessa della serie L_2 C_2 è data dalla somma delle impedenze complesse di induttanza e condensatore:

$$Z_2 = Z_{2L} + Z_{2C} = j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}$$

$$Z_2 = j\left(\frac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2}\right) = Z_{2,0} e^{j\pi/2} \qquad \text{con } Z_{2,0} = \frac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2}$$

Invece per il parallelo di L_3 e C_3 si sommano gli inversi delle impedenze complesse:

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_{3L}} + \frac{1}{Z_{3C}} = \frac{1}{j\omega L_3} - \frac{\omega C_3}{j}$$

$$\frac{1}{Z_3} = \left(\frac{1 - \omega^2 L_3 C_3}{j\omega L_3}\right)$$

$$Z_3 = j\left(\frac{\omega L_3}{1 - \omega^2 L_3 C_3}\right) = Z_{3,0} e^{j\pi/2} \qquad \text{con } Z_{3,0} = \frac{\omega L_3}{1 - \omega^2 L_3 C_3}$$

L'impedenza totale Z_{TOT} è data dalla somma di Z_2 e Z_3:

$$Z_{TOT} = Z_2 + Z_3$$

$$Z_{TOT} = j\left(\frac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2}\right) + j\left(\frac{\omega L_3}{1-\omega^2 L_3 C_3}\right)$$

$$Z_{TOT} = j\left(\frac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2} + \frac{\omega L_3}{1-\omega^2 L_3 C_3}\right) = Z_{TOT,0}e^{j\pi/2}$$

con $Z_{TOT,0} = Z_{2,0} + Z_{3,0} = \dfrac{\omega^2 L_2 C_2 - 1}{\omega C_2} + \dfrac{\omega L_3}{1-\omega^2 L_3 C_3}$

Punto 2): Per calcolare il rapporto $V_{OUT,0}/V_{IN,0}$ prima di tutto dobbiamo calcolare la $V_{OUT,0}$ nota la $V_{IN,0}$. Per fare questo dobbiamo calcolare la corrente circolante nel circuito, $I_0 e^{j\omega t} e^{j\phi}$, applicando il metodo dei fasori, visto che sono state già calcolate le impedenze complesse:

$$\vec{V}_{IN} = Z_{TOT}\vec{I}$$

$$V_{IN,0}e^{j\omega t} = Z_{TOT,0}e^{j\pi/2} I_0 e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

$$I_0 = \frac{V_{IN,0}}{Z_{TOT,0}} \quad \text{e} \quad \phi = -\pi/2$$

$$\vec{I} = I_0 e^{j\phi} e^{j\omega t} = \frac{V_{IN,0}}{Z_{TOT,0}} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t}$$

Nota la corrente complessa possiamo calcolare il fasore della tensione di uscita, moltiplicando il fasore della corrente per l'impedenza complessa Z_3:

$$\vec{V}_{OUT} = Z_3\vec{I}$$

$$V_{OUT,0}e^{j\omega t}e^{j\alpha} = Z_3 I_0 e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

$$V_{OUT,0}e^{j\omega t}e^{j\alpha} = Z_3 \frac{V_{IN,0}}{Z_{TOT,0}} e^{j\omega t} e^{-j\pi/2}$$

$$V_{OUT,0}e^{j\alpha} = Z_{3,0}e^{j\pi/2} \frac{V_{IN,0}}{Z_{TOT,0}} e^{-j\pi/2}$$

$$V_{OUT,0} = \frac{Z_{3,0}}{Z_{TOT,0}} V_{IN,0} \qquad \text{con } \alpha = 0$$

Dall'ultima espressione si può determinare il rapporto $V_{OUT,0}/V_{IN,0}$, che come vediamo dipende dal rapporto fra l'impedenza Z_3 e l'impedenza totale Z_{TOT}:

$$\frac{V_{OUT,0}}{V_{IN,0}} = \frac{Z_{3,0}}{Z_{TOT,0}} = \frac{Z_{3,0}}{Z_{2,0} + Z_{3,0}}$$

$$\frac{V_{OUT,0}}{V_{IN,0}} = \frac{Z_{3,0}}{Z_{2,0} + Z_{3,0}} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}}}$$

Calcoliamo il rapporto $Z_{2,0}/Z_{3,0}$:

$$\frac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}} = \frac{\left(\omega^2 L_2 C_2 - 1\right)}{\omega C_2} \cdot \frac{\left(1 - \omega^2 L_3 C_3\right)}{\omega L_3}$$

$$\frac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}} = -\frac{\left(1 - \omega^2 L_2 C_2\right)\left(1 - \omega^2 L_3 C_3\right)}{\omega^2 L_3 C_2}$$

Sostituendo quest'ultima espressione nella precedente si ottiene il rapporto cercato $V_{OUT,0}/V_{IN,0}$:

$$\frac{V_{OUT,0}}{V_{IN,0}} = \frac{1}{1 - \frac{\left(1 - \omega^2 L_2 C_2\right)\left(1 - \omega^2 L_3 C_3\right)}{\omega^2 L_3 C_2}}$$

Punto 3): Dalle ultime espressioni scritte si vede che il rapporto $V_{OUT,0}/V_{IN,0}=1$ quando il rapporto $Z_{2,0}/Z_{3,0}=0$. Da quest'ultima espressione possiamo determinare le pulsazioni per le quali $V_{OUT,0}/V_{IN,0}=1$:

$$\frac{V_{OUT,0}}{V_{IN,0}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}}}$$

$$\frac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}} = 0 \Rightarrow \frac{V_{OUT,0}}{V_{IN,0}} = 1$$

$$\frac{Z_{2,0}}{Z_{3,0}} = 0 \Rightarrow \frac{\left(1 - \omega^2 L_2 C_2\right)\left(1 - \omega^2 L_3 C_3\right)}{\omega^2 L_3 C_2} = 0$$

$$\omega^2 L_2 C_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \omega^2 L_3 C_3 = 1$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \qquad \text{e} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_3 C_3}}$$