Risultati esame scritto Fisica 2 - 29/09/2014
orali: 01-10-2014 alle ore 14.30 presso aula O

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
114866	14	
114917	12	
112116	21	ammesso
114920	nc	
115088	13	
114914	15	
115161	13	
108488	nc	
115780	nc	
107152	nc	

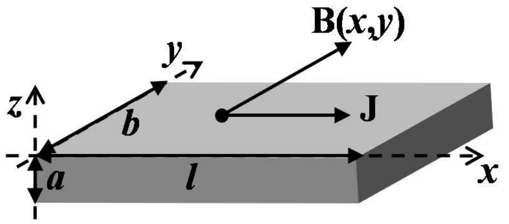
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 29/09/2014

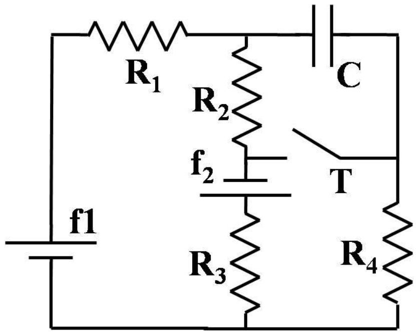
Problema 1

Sia dato un nastro conduttore di spessore a, larghezza b e lunghezza l. Esso è percorso da densità di corrente uniforme pari a J (diretta come in figura) ed è immerso in un campo magnetico B=$B(x,y)$ non uniforme, parallelo alla superficie del nastro e diretto lungo il lato della larghezza (vedi figura). Il campo magnetico è uniforme nella direzione dello spessore a, ma dipende dalle coordinate x,y (che individuano la superficie parallela al nastro) secondo la legge $B(x,y)=B_0 \cdot xy$, con B_0 pari a una costante (con dimensioni T/m^2). L'origine degli assi di riferimento coincide con un vertice del nastro, come rappresentato in figura. Trascurando il campo magnetico proddotto dalla corrente J, si determini il modulo della forza totale a cui è soggetto il nastro conduttore [si esprima il risultato in funzione dei parametri del problema J, B_0, a, b, l]



Problema 2

Nel circuito in figura sono note la forza elettromotrice f_1 e il valore della capacità C. Si sa inoltre che per le forze elettromotrici vale la relazione f_2=2·f_1, mentre per le resistenze si hanno le seguenti uguaglianze: R_2=2·R_1; R_3=3·R_1; R_4=4·R_1. Inizialmente l'interruttore T è aperto e si realizza la condizione di regime. Successivamente l'interruttore viene chiuso e si realizza una nuova condizione di regime. Si determini la variazione di carica ΔQ sul condensatore C [si esprima il risultato in funzione dei parametri del problema f_1 e C].



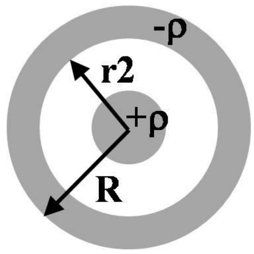
Problema 3

Sia data una sfera dielettrica di raggio r_1 con ditribuzione di carica positiva uniforme, pari a $+\rho$. Al suo esterno si trova un guscio sferico dielettrico, di raggio interno r_2 e raggio esterno R, con distribuzione di carica negativa uniforme, pari a $-\rho$. La sfera positiva e il guscio sferico negativo sono concentrici, e nella regione intermedia si ha spazio vuoto. Il raggio esterno di tutto il sistema, R, è noto e si ha inoltre che R=2·r_1. Sapendo che la carica totale di tutto il sistema è nulla, si determini:

1) il volume τ dello spazio vuoto (in funzione di R);

2) unœspressione per il campo elettrico $E(r)$ in tutto lo spazio: internamente alla sfera di raggio r_1, nello spazio vuoto, all'interno del guscio sferico ed esternamente al sistema (in funzione, oltre che di r, dei parametri del problema ρ ed R e della costante ε_0)

3) unœspressione per la differenza di potenziale ΔV_{12} fra la superficie della sfera, r=r_1, e la superficie interna del guscio, r=r_2 (in funzione dei parametri del problema ρ ed R e della costante ε_0), specificando dove si ha il potenziale maggiore.



Soluzione problema 1

La forza infinitesima *dF* che agisce sul nastro conduttore è del tipo:

$$dF = I\left|d\vec{l} \times \vec{B}\right|$$

dove *I* è la corrente che circola in un elemento di conduttore infinitesimo *dl* (in posizione *x*,*y*), e *B* è il campo magnetico nel punto del conduttore in cui si trova *dl*. Dato che la densità di corrente *J* è uniforme, la corrente *I* sarà data dalla seguente espressione:

$$I = Ja \cdot dy$$

Tenuto conto del fatto che *dl*=*dx* e che l'angolo compreso fra *dl* e *B* è di 90°, per la forza infinitesima *dF* si ha che:

$$dF = Ja \cdot dydx \cdot B(x, y)$$

$$dF = JaB_0 \cdot xydydx$$

La forza totale *F* sarà pari all'integrale di *dF* su tutta la superficie del conduttore:

$$F = \int dF = JaB_0 \iint xydydx$$

$$F = JaB_0 \int_0^l xdx \int_0^b ydy$$

$$F = \frac{JB_0 ab^2 l^2}{4}$$

Soluzione problema 2

Quando l'interruttore *T* è aperto, il circuito è costituito da una sola maglia (quella a sinistra) e la corrente circola solo in essa. In condizioni stazionarie, applicando la legge di Ohm si ha che:

$$f_1 + f_2 = (R_1 + R_2 + R_3) \cdot I$$

$$f_1 + 2f_1 = 6R_1 \cdot I$$

$$I = \frac{f_1}{2R_1}$$

Il condensatore *C* è collegato attraverso R_4 al polo negativo di f_1, e attraverso R_1 al polo positivo di f_1. Ma con l'interruttore *T* aperto, in R_4 non passa corrente e quindi una piastra di *C* risulta collegata direttamente al polo negativo di f_1. Invece in R_1 passa la corrente *I* appena determinata e bisogna sottrarre a f_1 la caduta di potenziale su R_1 per avere la tensione sull'altra piastra di *C*:

$$\Delta V_i = f_1 - R_1 \cdot I$$

$$\Delta V_i = f_1 - R_1 \frac{f_1}{2R_1} = \frac{f_1}{2}$$

Applicando la legge dei condensatori si trova la carica iniziale sul condensatore:

$$Q_i = C \cdot \Delta V_i = \frac{Cf_1}{2}$$

Dopo la chiusura dell'interruttore, la corrente circola nella maglia di sinistra e nella maglia contenente R_4 (in basso a destra in figura), ma a regime ovviamente non c'è corrente sul condensatore *C*. Supponendo di avere due correnti I_1 e I_2 per ciascuna maglia (rispettivamente per la maglia a sinistra e per quella in basso a destra), circolanti entrambe in senso orario, si ha il seguente sistema applicando le leggi di Kirchhoff:

$$\begin{cases} f_1 + f_2 = (R_1 + R_2 + R_3)\cdot I_1 - R_3 \cdot I_2 \\ - f_2 = -R_3 \cdot I_1 + (R_3 + R_4)\cdot I_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottiene che:

$$\begin{cases} I_1 = \frac{5}{11}\frac{f_1}{R_1} \\ I_2 = -\frac{1}{11}\frac{f_1}{R_1} \end{cases}$$

In questo caso la d.d.p. ai capi del condensatore C è data dalla caduta di potenziale sulla resistenza R_2:

$$\Delta V_f = R_2 \cdot I_1$$

$$\Delta V_f = 2R_1 \frac{5}{11}\frac{f_1}{R_1} = \frac{10}{11} f_1$$

da cui segue che la carica finale sul condensatore C è data da:

$$Q_f = C \cdot \Delta V_f = \frac{10}{11} C f_1$$

La variazione di carica fra la situazione a regime finale e iniziale è data da $\Delta Q = Q_f - Q_i$:

$$\Delta Q = Q_f - Q_i =$$

$$\Delta Q = \frac{10}{11} C f_1 - \frac{1}{2} C f_1 = \frac{9}{22} C f_1$$

Soluzione problema 3

Punto 1): allôinterno della sfera di raggio r_1 si ha solo carica positiva $+\rho$, per cui la carica Q^+ racchiusa allôinterno di $r < r_1$ è data da:

$$Q^+ = \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3$$

Per $r_2 < r < R$ si ha invece carica negativa $Q^ï$ racchiusa allôinterno del guscio sferico con $r_2 < r < R$, la cui espressione è:

$$Q^- = -\frac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 - r_2^3\right)$$

La carica totale del sistema, data dalla somma $Q^+ + Q^ï$, deve essere nulla, da cui segue che:

$$0 = Q^+ + Q^- = \frac{4}{3}\pi\rho r_1^3 - \frac{4}{3}\pi\rho\left(R^3 - r_2^3\right) = \frac{4}{3}\pi\rho\left(r_1^3 - R^3 + r_2^3\right)$$

$$0 = \frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R^3}{8} + r_2^3 - R^3\right)$$

$$-\frac{7}{8}R^3 + r_2^3 = 0$$

$$r_2^3 = \frac{7}{8}R^3$$

Noti $r_1=R/2$ e r_2, appena calcolato, possiamo determinare il volume τ dello spazio vuoto fra sfera e guscio sferico:

$$\tau = \frac{4}{3}\pi\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

$$\tau = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{7}{8}R^3 - \frac{1}{8}R^3\right) = \pi R^3$$

Punto 2): data la simmetria radiale del problema, il campo elettrico può essere calcolato mediante il teorema di Gauss. Consideriamo inizialmente una superficie gaussiana sferica avente raggio $r > R$. La carica totale racchiusa al suo interno è nulla, da cui segue che:

$$4\pi r^2 E = 0 \rightarrow E = 0 \quad \text{per } r > R$$

Consideriamo ora una superficie gaussiana sferica avente raggio $r < r_1$; al suo interno è racchiusa solo carica positiva con densità $+\rho$, da cui segue per il teorema di Gauss:

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3}{3\varepsilon_0}\rho$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \text{per } r < r_1 = \frac{R}{2}$$

Consideriamo ora una superficie gaussiana sferica avente raggio $r_1 < r < r_2$, che racchiude tutta la carica positiva ma nessuna parte della carica negativa. Sempre per il teorema di Gauss, si ha che:

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r_1^3}{3\varepsilon_0}\rho$$

$$Er^2 = \frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0 r^2} \quad \text{per } r_1 < r < r_2$$

Consideriamo ora una superficie gaussiana sferica avente raggio $r_2 < r < R$, che racchiude tutta la carica positiva e parte della carica negativa. Sempre per il teorema di Gauss, si ha che:

$$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r_1^3}{3\varepsilon_0}\rho - \frac{4\pi}{3\varepsilon_0}\rho\left(r^3 - r_2^3\right)$$

$$Er^2 = \frac{\rho r_1^3}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r^3 - r_2^3\right)$$

$$Er^2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r_1^3 + r_2^3 - r^3\right)$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{R^3}{8} + \frac{7R^3}{8} - r^3\right)$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R^3}{r^2} - r\right) \quad \text{per } r_2 < r < R$$

Punto 3): Per la differenza di potenziale fra la superficie della sfera, $r=r_1$, e la superficie interna del guscio sferico, $r=r_2$, applichiamo la definizione di d.d.p. e integriamo il campo elettrico $E(r)$ trovato al punto 2) fra le due posizioni $r=r_1$ e $r=r_2$:

$$\Delta V_{12} = V_1 - V_2 = \int_{r1}^{r2} E(r)dr$$

$$\Delta V_{12} = \int_{r1}^{r2} \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\int_{r1}^{r2}\frac{dr}{r^2}$$

$$\Delta V_{12} = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r1}^{r2}$$

$$\Delta V_{12} = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right]$$

$$\Delta V_{12} = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\left[\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right]$$

$$\Delta V_{12} = \frac{\rho R^3}{24\varepsilon_0}\left[2\cdot\frac{\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt[3]{7}R}\right] = \frac{\rho R^2}{12\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)$$

Dato che ΔV_{12} è positivo, allora il potenziale maggiore si ha sulla superficie della sfera, per $r = r_1$.