Risultati esame scritto Fisica 1 - 22/09/2014
orali: 29-09-2014 alle ore 14.30 presso aula T

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
112119	12	
115212	14	
112118	nc	
108481	nc	
114983	17	ammesso
114893	12	
114920	14	
114912	22	ammesso
113777	17	ammesso
114931	12	
108502	14	
116764	19	ammesso
113579	13	
114925	10	
116400	17	ammesso
112076	17	ammesso
113142	21	ammesso
116288	nc	
115618	18	ammesso
115753	11	
114927	14	
114923	17	ammesso
114919	17	ammesso
115202	nc	
113481	13	
107059	21	ammesso
115063	18	ammesso
114956	11	
114868	13	
114941	14	
114885	15	

Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 22/09/2014

Problema 1

Un corpo viaggia su un piano orizzontale con velocità v=10.0m/s, senza attrito. Improvvisamente incontra un tratto di larghezza Δx=10.0m con coefficiente di attrito pari a μ. Determinare il valore minimo di μ affinché il corpo riesca a superare la larghezza Δx.

Problema 2

Siano dati 3 corpi, rispettivamente di massa m_1, m_2 e m_3, disposti lungo un asse verticale e collegati come in figura: il corpo m_1 è vincolato al soffitto tramite una fune insestensibile di massa trascurabile; il corpo m_2 è legato al corpo m_1 tramite una molla di massa trascurabile, lunghezza a riposo non nulla (e NON nota) e costante elastica k; il corpo m_3 è legato al corpo m_2 tramite una fune insestensibile di massa trascurabile. Tutto il sistema è soggetto all'accelerazione di gravità g, ed è trascurabile qualsiasi forma di attrito.

1) Determinare la deformazione iniziale, $\Delta x_{2,i}$, della molla quando i tre corpi sono fermi e in equilibrio.

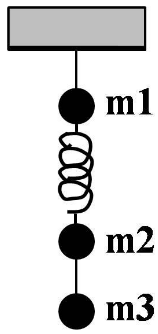
All'istante t=0, viene improvvisamente recisa la fune che lega i corpi m_2 e m_3. Si supponga che da questo istante in poi il corpo m_1 rimanga fermo.

2) Determinare la nuova deformazione di equilibrio, $\Delta x_{2,0}$, della molla.

3) Determinare un'espressione della deformazione della molla, $\Delta x_2(t)$, in funzione del tempo t.

4) Determinare un'espressione della tensione T_1, presente nella fune che lega il corpo m_1 al soffito, in funzione del tempo t.

[Si esprimano tutti i risultati in funzione dei parametri m_1, m_2, m_3, k, dell'accelerazione g, e ove necessario del tempo t]



Problema 3

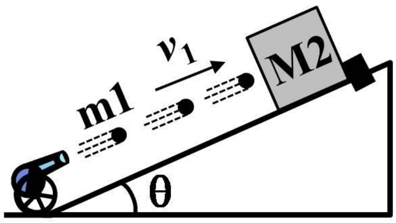
Sia dato un piano inclinato che forma un angolo θ=30° con l'orizzontale. Sul piano inclinato si trova un corpo di massa M_2=40.0kg che si può muovere senza attrito lungo il piano inclinato. In fondo al piano inclinato si trova un'arma che spara proiettili di massa m_1=0.05kg parallelamente al piano inclinato e con velocità iniziale v_{1i}=100m/s. Si trascuri l'effetto della forza di gravità sui proiettili, ma non sul corpo M_2.

1) L'arma spara un singolo proiettile contro il corpo di massa M_2. Supponendo che al momento dell'urto il corpo M_2 sia fermo, si determini la velocità v_{2f} del corpo M_2 subito dopo l'urto nel caso di urto perfettamente elastico, e la massima distanza Δx percorsa parallelamente al piano inclinato. Si ripeta il calcolo nel caso di urto perfettamente anelastico

2) Sia ora presente un perno dietro il corpo M_2 che ne impedisca la salita lungo il piano inclinato (vedi figura). L'arma spara continuamente proiettili contro il corpo M_2, con una frequenza f (cioè f colpi al secondo). Si determini il valore di f per cui il corpo M_2 rimane fermo contro il perno, nel caso di urti perfettamente elastici (si trascurino i possibili urti fra i proiettili che arrivano sul bersaglio e quelli che rimbalzano da esso)

3) Sempre nel caso del punto 2) col perno dietro il corpo M_2, si determini un'espressione della frequenza f in funzione del tempo t affinché il corpo M_2 rimanga fermo nel caso di urti perfettamente anelastici.

[Suggerimento: si consideri che la variazione di quantità di moto Δp del proiettile è pari alla quantità di moto Δp trasferita al bersaglio]



Soluzione problema 1

Detta m la massa del corpo, la forza di attrito che si oppone al moto sul tratto Δx è pari a:

$$F_A = \mu mg$$

da cui segue che si ha un moto decelerato con accelerazione a (in modulo):

$$a = \frac{F_A}{m} = \mu g$$

Affinché il corpo riesca a superare il tratto Δx è necessario che la velocità finale, v_f, dopo tale tratto sia Ó0:

$$v_f^2 = v^2 - 2a\Delta x \geq 0$$

$$v^2 - 2\mu g\Delta x \geq 0$$

$$2\mu g\Delta x \leq v^2$$

$$\mu \leq \frac{v^2}{2g\Delta x} \approx 0.5$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Quando i tre corpi sono fermi e all'equilibrio, sul corpo m_2 agiscono la forza elastica F_k diretta verso l'alto e la forza peso F_P diretta verso il basso. La forza peso è dovuta sia alla massa m_2 che alla massa m_3 legata tramite una fune al corpo m_2. Poiché il sistema è in equilibrio e il corpo m_2 è fermo, queste forze si devono bilanciare:

$$F_k = F_P$$

$$k\Delta x_{2,i} = (m_2 + m_3)g$$

$$\Delta x_{2,i} = \frac{(m_2 + m_3)}{k} g$$

Punto 2): Quando il corpo m_3 viene rimosso dal sistema, la nuova deformazione di equilibrio si ha quando la forza elestica bilancia la forza peso del solo corpo m_2:

$$k\Delta x_{2,0} = m_2 g$$

$$\Delta x_{2,0} = \frac{m_2}{k} g$$

Punto 3): Dato che per t=0 la deformazione della molla è pari a $\Delta x_{2,i}$ ma la nuova deformazione di equilibrio è pari a $\Delta x_{2,0}$ (minore di $\Delta x_{2,i}$), la molla inizia a contrarsi e arriva alla posizione di equilibrio $\Delta x_{2,0}$ con velocità diversa da zero. Quindi la oltrepassa e continua a comprimere la molla, fino a quando la forza elastica non è sufficientemente alta da fermare il moto di m_2 e riportarlo verso il basso. Il corpo m_2 inizia quindi a oscillare intorno alla nuova posizione di equilibrio, e si ha una deformazione della molla, $\Delta x_2(t)$, che oscilla nel tempo. Assumendo un asse di riferimetno orintato verso il basso, il II principio della dinamica per il corpo m_2 si scrive come:

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = m_2 g - k\Delta x_2(t)$$

$$\frac{m_2}{k} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{m_2}{k} g - \Delta x_2(t)$$

$$\frac{m_2}{k}\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \Delta x_{2,0} - \Delta x_2(t)$$
dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del risultato trovato al punto 2).

Tenendo ora presente che:
$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{d^2(\Delta x_2)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[\Delta x_2 - \Delta x_{2,0}\right]$$

si ottiene che:
$$\frac{m_2}{k}\frac{d^2}{dt^2}\left[\Delta x_2 - \Delta x_{2,0}\right] = -(\Delta x_2 - \Delta x_{2,0})$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\Delta x_2 - \Delta x_{2,0}\right] + \frac{k}{m_2}(\Delta x_2 - \Delta x_{2,0}) = 0$$

Quest'ultima è un'equazione differenziale di tipo armonico la cui soluzione è nota:
$$\left[\Delta x_2(t) - \Delta x_{2,0}\right] = A\cos(\omega t) \qquad \text{con } \omega = \sqrt{k/m_2}$$
$$\Delta x_2(t) = \Delta x_{2,0} + A\cos(\omega t)$$
$$\Delta x_2(t) = \frac{m_2 g}{k} + A\cos(\omega t)$$

Per determinare l'ampiezza A consideriamo l'istante iniziale t=0:
$$\Delta x_2(t=0) = \frac{m_2 g}{k} + A\cos(0)$$
$$\Delta x_{2,i} = \frac{m_2 g}{k} + A$$
$$A = \frac{(m_2 + m_3)g}{k} - \frac{m_2 g}{k} = \frac{m_3 g}{k}$$

Quindi la soluzione $\Delta x_2(t)$ in funzione dei parametri noti del problema è data da:
$$\Delta x_2(t) = \frac{m_2 g}{k} + \frac{m_3 g}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right)$$

Punto 4): Dato che il corpo m_1 è fermo, la tensione T_1 ai capi della fune che lega al soffitto il corpo m_1 deve bilanciare le altre forze che agiscono su m_1. Su di esso abbiamo che agiscono la forza peso della massa m_1 verso il basso e la forza elastica verso il basso (per il principio di azione e reazione, la forza elastica che si esercita su m_2 la ritroviamo con verso opposto su m_1). La tensione T_1 è diretta verso l'alto e avrà modulo pari a:
$$T_1 = F_P + F_k$$
$$T_1 = m_1 g + k\Delta x_2(t)$$

$$T_1 = m_1 g + k\left[\frac{m_2 g}{k} + \frac{m_3 g}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right)\right]$$

$$T_1 = (m_1 + m_2)g + m_3 g\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_2}}t\right)$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Nel caso di urto perfettamente elastico si conservano sia la quantità di moto che l'energia cinetica, da cui segue che:

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + M_2 v_{2f} \\ v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + M_2 v_{2f} \\ v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 (v_{2f} - v_{1i}) + M_2 v_{2f} \\ v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{2f} = \dfrac{2m_1}{m_1 + M_2} v_{1i} \approx 0.25\text{m/s} \\ v_{1f} = \dfrac{m_1 - M_2}{m_1 + M_2} v_{1i} \end{cases}$$

L'accelerazione del blocco lungo il piano inclinato è data dalla componente parallela al piano dell'accelerazione di gravità, $g\cdot\sin(\theta)$. Dopo l'urto si ha allora un moto uniformemente decelerato con velocità iniziale v_{2f}; la distanza massima percorsa si ha quando la velocità del corpo M_2 diventa pari a zero. Ne segue allora che:

$$0 = v_{2f}^2 - 2g\sin(\theta)\cdot\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{v_{2f}^2}{2g\sin(\theta)} \approx 0.006\text{m}$$

Ripetiamo il calcolo nel caso di urto anelastico. Si ha solo la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + M_2)v_{2f}$$

$$v_{2f} = \frac{m_1}{(m_1 + M_2)} v_{1i} \approx 0.12\text{m/s}$$

Per la distanza Δx percorsa vale un discorso analogo al precedente e quindi:

$$\Delta x = \frac{v_{2f}^2}{2g\sin(\theta)} \approx 0.001\text{m}$$

Punto 2): Gli urti dei proiettili contro il corpo M_2 trasferiscono una quantità di moto, Δp, al corpo M_2. Poiché cerchiamo la frequenza f per la quale il corpo M_2 rimanga fermo contro il perno, si avrà che la velocità iniziale e finale di M_2 è nulla e i proiettili rimbalzano elasticamente contro di esso. La quantità di moto iniziale, parallelamente al piano inclinato, è pari a $m_1 v_{1i}$ diretta verso l'alto, mentre dopo l'urto la quantità di moto sarà $-m_1 v_{1i}$, diretta verso il basso. Quindi la quantità di moto Δp trasferita a M_2 da ciascun proiettile è pari a:

$$\Delta p = 2m_1 v_{1i}$$

Dato che i colpi arrivano con frequenza f, in un intervallo di tempo Δt la quantità di moto totale Δp_{TOT} trasferita a M_2 è data da:

$$\Delta p_{TOT} = 2m_1 v_{1i} f \Delta t$$

Per definizione di forza F come $\Delta p/\Delta t$, si ha allora che la forza media esercitata dai proiettili sul corpo M_2, parallelamente al piano inclinato e diretta verso l'alto, è pari a:

$$F = \frac{\Delta p_{TOT}}{\Delta t} = 2m_1 v_{1i} f$$

Applicando il II principio della dinamica e considerando la componente parallela al piano inclinato della forza peso $F_{P\|}$ (diretta verso il basso) che agisce sul corpo M_2, si può scrivere che:

$$M_2 a = F - F_{P\|}$$

$$M_2 a = 2m_1 v_{1i} f - M_2 g \sin\theta$$

Affinché M_2 rimanga fermo, è necessario che l'accelerazione a sia pari a zero, e questo ci permette di determinare il valore di f corrispondente:

$$2m_1 v_{1i} f - M_2 g \sin\theta = 0$$

$$2m_1 v_{1i} f = M_2 g \sin\theta$$

$$f = \frac{M_2 g \sin\theta}{2m_1 v_{1i}} \approx 19.6\text{Hz}$$

Punto 3): Dato che gli urti sono anelastici, si ha che la quantità di moto del proiettile viene trasferita al bersaglio, per cui ogni proiettile provoca una variazione di quantità di moto Δp pari alla quantità di moto del proiettile, $p_{1i}=m_1 \cdot v_{1i}$.
Dato che abbiamo f proiettili/s, la variazione di quantità di moto totale, Δp_{TOT}, del bersaglio in un intervallo Δt è pari a:

$$\Delta p_{TOT} = p_{1i} f \Delta t = m_1 v_{1i} f \Delta t$$

Ne segue che la forza media esercitata dai proiettili, pari a $F=\Delta p_{TOT}/\Delta t$, è data da:

$$F = \frac{\Delta p_{TOT}}{\Delta t} = f m_1 v_{1i}$$

Questa forza F è ovviamente diretta verso l'alto parallelamente al piano inclinato, a cui si oppone la componente della forza peso parallela al piano inclinato, $F_{P\|}$.

Prima di scrivere il II principio della dinamica per il bersaglio, bisogna però tenere conto del fatto che gli urti sono tutti perfettamente anelastici e che quindi la massa M_{TOT} del bersaglio cresce nel tempo a causa dei proiettili che si conficcano nel bersaglio. Per cui la massa M_{TOT} del bersaglio varia nel tempo:

$$M_{TOT}(t) = M_2 + m_1 f t$$

dove t è il tempo trascorso a partire dall'istante del primo urto.

Il II principio della dinamica si scrive allora come:

$$M_{TOT} a = F - F_{P\|}$$

$$M_{TOT} a = f m_1 v_{1i} - M_{TOT} g \sin(\theta)$$

Come nel caso del punto 2), imponiamo che l'accelerazione *a* sia pari a zero, per avere che il bersaglio rimanga fermo contro il perno, e questo ci permette di determinare l'espressione della frequenza *f*:

$$fm_1 v_{1i} - M_{TOT}\, g \sin(\theta) = 0$$
$$fm_1 v_{1i} - (M_2 + m_1 ft) g \sin(\theta) = 0$$
$$f(m_1 v_{1i} - m_1 gt \sin\theta) = M_2 g \sin\theta$$
$$f = \frac{M_2 g \sin\theta}{m_1 (v_{1i} - gt\sin\theta)}$$

Si noti che per $t = v_{1i}/g \cdot \sin\theta \approx 20.4$s, la frequenza *f* diverge a +Ð, che non è fisicamente accettabile. Questo significa che per $t \rightarrow v_{1i}/g \cdot \sin\theta$ la forza peso diventa dominante e sarebbe necessaria una frequenza infinita di colpi per controbilanciarla (questo perché a causa degli urti anelastici la massa del bersaglio cresce indefinitamente con gli urti). Quindi oltre questo valore di *t* non è più possibile sostenere il bersaglio tramite gli urti, ed esso inizierà a muoversi verso il basso.