Risultati esame scritto Fisica 2 - 16/02/2015
orali: 23-02-2015 alle ore 14.00 presso aula M

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
114866	27	ammesso
114962	14	
109839	14	
107257	17	ammesso
109764	nc	
114914	nc	
115087	21	ammesso
115161	nc	
109815	11	
109842	nc	

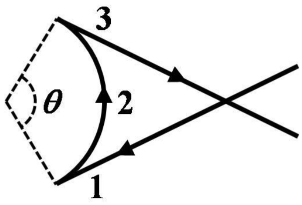
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 16/02/2015

Problema 1

Sia dato un filo conduttore modellato come in figura. Esso è costituito da un tratto di filo rettilineo di lunghezza semi-infinita (tratto 1), che prosegue con un tratto di filo curvilineo che percorre un arco di circonferenza (tratto 2), e che infine termina con un secondo tratto rettilineo di lunghezza semi-infinita (tratto 3). Il tratto 1 e il tratto 3 sono tangenti all'arco di circonferenza del tratto 2. Tutto il filo è percorso dalla stessa corrente continua, con la direzione rappresentata dalle frecce in figura. Sapendo che dove il tratto 1 interseca il tratto 3, i due fili sono reciprocamente isolati (l'intersezione non costituisce un nodo) e non conoscendo nessun parametro del problema (corrente I e raggio R della circonferenza non sono noti), determinare per quale angolo θ sotteso al centro dall'arco di circonferenza si ha campo magnetico, B, nullo al centro della circonferenza.



Problema 2

Sia dato un sistema di due condensatori, 1 e 2, collegati in parallelo come in figura. I condensatori sono piani, con piastre di uguale superficie e separate dalla stessa distanza h, ma uno di essi (condensatore 2, a destra in figura) è parzialmente riempito con una lastra dielettrica di costante dielettrica relativa ε_r. In particolare la lastra dielettrica ha stessa superficie dei condensatori ma uno spessore pari a $x \cdot h$ (con $0<x<1$).

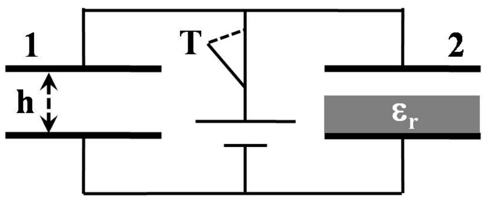
Come rappresentato in figura, i due condensatori sono collegati ad un generatore e vengono caricati; dopo il processo di carica il generatore viene staccato aprendo l'interruttore T. A questo punto si osserva che la densità di carica sulle piastre del condensatore vuoto (condensatore 1, sulla sinistra in figura) è pari a σ_1 e il campo elettrico all'interno della lastra dielettrica è pari a $E_d=(1/2) \cdot E_{0,1}$, dove $E_{0,1}$ è il campo elettrico all'interno del condensatore vuoto (condensatore 1).

Assumendo come noti solo i parametri h, x e σ_1, si determini:

1) la d.d.p. V_0 ai capi dei condensatori;

2) la costante dielettrica relativa ε_r (nel condensatore 2 il campo elettrico E_d all'interno del dielettrico e quello esterno al dielettrico, $E_{0,2}$, sono legati dalla relazione $E_d=E_{0,2}/\varepsilon_r$);

3) la densità di carica σ_2 sulle piastre del condensatore 2.



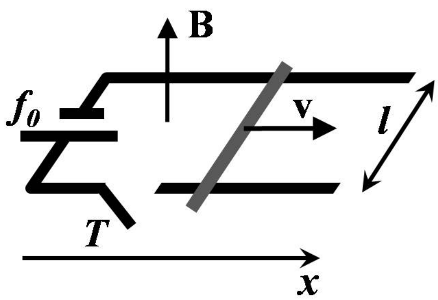
Problema 3

Sia dato un circuito come quello in figura disposto nel piano orizzontale e costituito da due binari conduttori paralleli separati da una distanza l, chiusi a sinistra da una barra conduttrice rigida e fissa, e a destra da una barra mobile in grado di scorrere sui binari senza attrito. La barra a sinistra contiene un generatore di tensione continua, f_0, orientato come in figura; la barra a destra ha massa m e resistenza elettrica R, mentre il resto del circuito ha resistenza trascurabile. Tutto il circuito è immerso in un campo magnetico B, uniforme nello spazio e costante nel tempo, perpendicolare alla superficie del circuito e orientato come in figura (verso l'alto). Inizialmente l'interruttore T è aperto e la barra mobile è ferma sui binari; all'istante t=0sec viene chiuso l'interruttore T.

1) Per $t \to$ Ð, la barra mobile possiede velocità costante (la velocità limite v_{lim}); determinare l'espressione di tale velocità (in funzione di B, f_0 e l)

2) Determinare l'espressione della corrente I circolante nel circuito in funzione del tempo t, per t Ó0sec (usando i parametri B, f_0, l , m e R, oltre al tempo t)

3) Per $t \to$ Ð, determinare il rendimento meccanico η del circuito, definito come il rapporto fra l'energia meccanica prodotta E_{MECC}, e l'energia totale fornita dal generatore E_{TOT} (η è un risultato numerico)



Soluzione problema 1

Il campo magnetico B generato da un filo infinito, percorso da corrente I, ha direzione tangente a una circonferenza che abbia come centro l'asse del filo e che giaccia nel piano perpendicolare al filo; il verso di B è tale da vedere il campo magnetico girare in senso antiorario intorno alla corrente I. Il modulo di B è dato da:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

dove r è la distanza dal filo infinito. Nel caso del tratto 1 e del tratto 3, abbiamo a che fare con metà filo infinito, quindi il precedente valore di B va diviso per 2. Per quanto riguarda la direzione del campo B_1 e B_3 generati rispettivamente dal tratto 1 e dal tratto 3, essa è perpendicolare al piano del foglio nella figura, sia per B_1 che per B_3. Il verso di entrambi questi campi è entrante nel piano del foglio, e quindi essi si sommano. Detta I la corrente che circola nei fili e detto R il raggio dell'arco di circonferenza, si ha che:

$$B_1 = B_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

$$B_{1+3} = B_1 + B_3 = 2B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

dove B_{1+3} è la somma dei campi B_1 e B_3 (entrante nel foglio).

Per quanto riguarda l'arco di circonferenza (tratto 2), si osservi che il campo magentico generato da una spira circolare di raggio R e percorsa da corrente I, al centro della spira è pari a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

ed è diretto perpendicolarmente alla spira e con verso tale da vedere la corrente I circolare in senso antiorario intorno al campo B prodotto. L'ultima formula vale però per una spira completa, ovvero con una circonferenza pari a $2\pi R$; nel caso di un arco di circonferenza, che sottende un angolo θ al centro, abbiamo solo una frazione di questo campo B pari a:

$$B_2 = B \frac{R \cdot \theta}{R \cdot 2\pi} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}$$

Dato il verso della corrente I nell'arco di circonferenza, il campo B_2 è uscente dal foglio e si oppone quindi a B_{1+3}.

Quindi il campo nel centro della circonferenza sarà nullo quando:

$$B_{1+3} = B_2$$

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I \theta}{4\pi R}$$

$$\theta = 2\,(\text{rad}) \approx 114.6°$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Per la definizione di potenziale elettrico, la d.d.p. V_0 ai capi del condensatore 1 è data dalla seguente relazione:

$$V_0 = \int_h E_{0,1} dh = E_{0,1} \cdot h$$

dove $E_{0,1}$ è il campo elettrico all'interno del condesatore 1 (che è uniforme fra le piastre del condensatore). Nota la densità di carica superficiale σ_1 sulle piastre del condensatore 1, il campo elettrico generato all'interno del condensatore è il seguente:

$$E_{0,1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$

da cui segue che la d.d.p. V_0 è la seguente:

$$V_0 = E_{0,1} \cdot h = \frac{\sigma_1 h}{\varepsilon_0}$$

Poiché i due condensatori sono stati caricati in parallelo, questa è anche la d.d.p. ai capi del condensatore 2.

Punto 2): Analogamente a quanto determinato al punto 1), la d.d.p. ai capi del condensatore 2 sarà data dall'integrale di linea del campo elettrico fra le piastre del condensatore 2:

$$V_0 = \int_h E_2 dh$$

dove E_2 è il campo elettrico all'interno del condensatore 2. Questa volta però E_2 non è uniforme all'interno del condensatore perché c'è una regione del condensatore occupata da dielettrico con costante ε_r. Quindi E_2=E_d nella regione col dielettrico, ovvero per un tratto pari a $x \cdot h$, mentre nella restante regione di lunghezza pari a $(1-x) \cdot h$ si ha che E_2=$E_{0,2}$, con $E_{0,2}$ campo elettrico nella regione vuota del condensatore 2. Si ha allora il precedente integrale diviso in due parti:

$$V_0 = \int_{(1-x)h} E_{0,2} dh + \int_{xh} E_d dh$$

$$V_0 = E_{0,2} h(1-x) + E_d hx$$

Sfruttando la relazione $\varepsilon_r E_d$=$E_{0,2}$ e il risultato del punto 1), V_0=$E_{0,1}h$, si ottiene che:

$$E_{0,1} h = \varepsilon_r E_d h(1-x) + E_d hx$$

Introducendo infine che E_d=(1/2)·$E_{0,1}$ si ha che:

$$E_{0,1} h = \frac{1}{2} \varepsilon_r E_{0,1} h(1-x) + \frac{1}{2} E_{0,1} hx$$

$$1 = \frac{1}{2} \varepsilon_r (1-x) + \frac{1}{2} x$$

$$\varepsilon_r = \frac{2-x}{1-x}$$

Punto 3): Come per il condensatore 1, in prossimità della piastra non a contatto col dielettrico, vale la relazione:

$$E_{0,2} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 E_{0,2}$$

Per quanto riguarda $E_{0,2}$ sappiamo che $E_{0,2}$=$\varepsilon_r E_d$=ε_r·(1/2)$E_{0,1}$, che inserita nell'ultima equazione fornisce che:

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{2} E_{0,1}$$

Dato che $E_{0,1}=\sigma_1/\varepsilon_0$ e utilizzando il risultato trovato al punto 2) per ε_r, se ne concude che:

$$\sigma_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{1}{2}\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{2-x}{1-x} \cdot \frac{\sigma_1}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{2-x}{2-2x}\sigma_1$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Nel momento in cui l'interruttore T viene chiuso, inizia a circolare corrente nel circuito in senso antiorario in figura. Nella barra mobile si ha allora corrente dal basso verso l'alto, in figura, ed essendo immersa in un campo magnetico B su di essa agisce una forza meccanica di origine magnetica, F_M:

$$F_M = \left| I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \right| = IBl$$

La forza F_M agisce verso destra in figura e produce il moto della barra. Al moto della barra si associa una variazione del flusso del campo magnetico B associato col circuito, dovuto all'aumento della superficie del circuito esposta al campo B (flusso tagliato). Per la legge dell'induzione di Faraday si ha una forza elettromotrice indotta, f_{ind}:

$$\Phi(B) = Blx$$

$$f_{ind} = \left| -\frac{d\Phi}{dt} \right| = \frac{d[Blx]}{dt} = Bl\frac{dx}{xt} = Blv$$

dove $\Phi(B)$ è il flusso concatenato col circuito, x è la coordinata che indica la posizione della barra mobile (a partire da quella fissa), e v è la velocità istantanea della barra mobile. Per la legge di Lenz, f_{ind} si oppone alla variazione di flusso Φ e cerca di produrre un campo magnetico diretto verso il basso, ovvero f_{ind} induce corrente in senso orario in figura (opposta alla forza elettromotrice f_0). La legge di Ohm per il circuito si scrive allora come:

$$f_0 - f_{ind} = RI$$

$$f_0 - Blv = RI$$

$$I = \frac{f_0}{R} - \frac{Blv}{R}$$

Per quanto riguarda la velocità v, essa dipende dal tempo. Infatti la barra è soggetta alla forza F_M e il II principio della dinamica si scrive come segue:

$$ma = F_M$$

$$m\frac{dv}{dt} = IBl$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f_0 Bl}{mR} - \frac{B^2 l^2 v}{mR}$$

Per definizione, la velocità limite si raggiunge quando $dv/dt \to 0$. Dall'ultima espressione segue allora che v_{lim} è data da:

$$\frac{dv}{dt} \to 0$$

$$\frac{f_0 Bl}{mR} - \frac{B^2 l^2 v}{mR} = 0$$

$$\frac{B^2 l^2 v_{\lim}}{mR} = \frac{f_0 Bl}{mR}$$
$$v_{\lim} = \frac{f_0}{Bl}$$

Punto 2): Nel punto 1) è stata trovata un'espressione per la corrente *I* che dipende dalla velocità istantanea *v*; sostituendo in questa corrente *I* l'espressione della velocità *v* dipendente dal tempo, si ottiene la corrente *I* desiderata per *t* Ó0sec. A questo scopo è necessario risolvere l'equazione differenziale trovata al punto 1) per la velocità *v*:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{f_0 Bl}{mR} - \frac{B^2 l^2 v}{mR}$$
$$\frac{dv}{dt} = A - Cv$$

con $A=f_0Bl/mR$ e $C=B^2l^2/mR$. Risolviamo l'equazione differenziale per separazione di variabli e successiva integrazione fra t=0sec e un istante generico t':

$$\frac{dv}{dt} = A - Cv$$
$$\frac{dv}{A - Cv} = dt$$
$$\int_0^{v'} \frac{dv}{A - Cv} = \int_0^{t'} dt$$
$$-\frac{1}{C}\ln(A - Cv)\Big|_0^{v'} = t\Big|_0^{t'}$$
$$\ln\left(\frac{A - Cv'}{A}\right) = -Ct'$$
$$\frac{A - Cv'}{A} = \exp(-Ct')$$
$$v = \frac{A}{C} \cdot [1 - \exp(-Ct)]$$
$$v(t) = \frac{f_0}{Bl}\left[1 - e^{-B^2 l^2 t / mR}\right]$$

dove nell'ultimo passaggio sono state sostituite ad *A* e *C* le rispettive espressioni. Quest'ultima rappresenta la velocità *v* in funzione del tempo *t*, e come vediamo per $t \rightarrow$ Ð si ottiene il valore limite v_{lim} determinato al punto 1).

Sostituendo la $v(t)$ nell'espressione della corrente *I*, si ottiene che:

$$I = \frac{f_0}{R} - \frac{Blv}{R}$$
$$I = \frac{f_0}{R} - \frac{Bl}{R} \cdot \frac{f_0}{Bl}\left[1 - e^{-B^2 l^2 t / mR}\right]$$
$$I = \frac{f_0}{R} e^{-B^2 l^2 t / mR}$$

che è l'espressione cercata per la corrente $I(t)$; come si vede $I \rightarrow 0$ per $t \rightarrow$ Ð.

Punto 3): L'unica energia meccanica prodotta è quella della barra mobile. Iniziamente essa è in quiete, mentre per $t \rightarrow$ Ð essa ha la velocità limite, v_{lim}, determinata al punto 1). Pertanto l'energia meccanica prodotta, E_{MECC}, è data dall'energia cinetica prodotta:

$$E_{MECC} = \frac{1}{2} m v_{\lim}^2 - 0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{f_0}{Bl} \right)^2$$

L'energia fornita dal generatore in un intervallo di tempo infinitesimo dt è data da:

$$dE = f_0 I(t) dt$$

Ne segue che l'energia totale, E_{TOT}, fornita dal generatore si ottiene mediante integrazione fra t=0sec e $t \rightarrow$ Ð:

$$E_{TOT} = \int dE$$

$$E_{TOT} = f_0 \int_0^\infty I(t) dt$$

$$E_{TOT} = \frac{f_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-B^2 l^2 t / mR} dt$$

$$E_{TOT} = \frac{f_0^2}{R} \cdot \left[- \frac{mR}{B^2 l^2} e^{-B^2 l^2 t / mR} \right]_0^\infty$$

$$E_{TOT} = \frac{f_0^2 m}{B^2 l^2} = m \left(\frac{f_0}{Bl} \right)^2$$

Il rendimento meccanico η cercato è allora dato da:

$$\eta = \frac{E_{MECC}}{E_{TOT}} = \frac{1}{2} m \left(\frac{f_0}{Bl} \right)^2 \Bigg/ m \left(\frac{f_0}{Bl} \right)^2 = \frac{1}{2}$$