Risultati esame scritto Fisica 2 - 02/03/2015
orali: 09-03-2015 alle ore 14.00 presso aula G

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
114962	17	ammesso
109839	22	ammesso
107257	21	ammesso
112836	nc	
114914	19	ammesso
115161	19	ammesso
116351	17	ammesso
112076	nc	
109815	12	

Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 02/03/2015

Problema 1

Su un piano orizzontale con assi cartesiani (x,y) siano posizionate tre cariche puntiformi q_1= $+Q$, q_2= $+Q$ e q_3= $-Q/\sqrt{2}$ rispettivamente nelle posizioni $\mathbf{r_1}=(-x_0,0)$, $\mathbf{r_2}=(+x_0,0)$ e $\mathbf{r_3}=(0,0)$. Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ vettoriale, dando anche una rappresentazione grafica qualitativa dei campi prodotti dalle singole cariche, e il potenziale elettrico V generato dalle tre cariche nella posizione $\mathbf{R}=(0,+x_0)$.

[Per il potenziale elettrico si assuma V=0 per distanza infinita; si esprimano i risultati in funzione di Q e x_0].

Problema 2

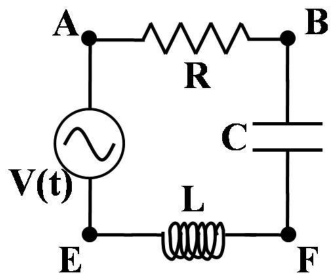
Sia dato un circuito RLC alimentato da un generatore di tensione alternata con ampiezza pari a V_0 e pulsazione ω. Oltre a V_0 e ω, siano noti anche i valori di resistenza R, di induttanza L e di capacità C.

1) Si determini l'impedenza complessa totale del circuito, riportandone sia il modulo Z_0 che il valore della fase ϕ [in funzione dei dati R, L, C, ω].

2) Si determini quindi l'espressione della corrente reale $I=I(t)$ che circola nel circuito in funzione del tempo t [usando i parametri R, L, C, ω, V_0].

3) Date le coppie di punti (A,B) e (E,F) del circuito (vedi figura), si detrmini l'espressione della differenza di potenziale reale $V=V(t)$ in funzione di t ai capi di A-B, $V_{AB}(t)$, e ai capi di E-F, $V_{EF}(t)$ [con i parametri R, L, C, ω, V_0]

4) Si indichi qual è lo sfasamento fra $V_{AB}(t)$ e $V_{EF}(t)$ e per quale valore di ω le loro ampiezze sono uguali.



Problema 3

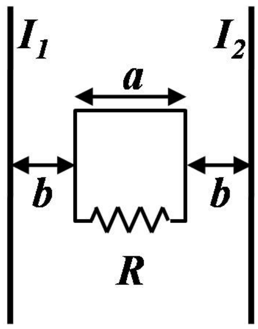
Siano dati in un piano orizzontale due fili infiniti percorsi da correnti alternate con diverse ampiezze e pulsazioni, rispettivamente $I_1(t)=I_{01}\cos(\omega_1 t)$ e $I_2(t)=I_{02}\cos(\omega_2 t)$. All'istante t=0sec le due correnti sono concordi (dirette verso l'alto in figura). Fra i due fili è posizionata una spira conduttrice quadrata di lato a e resistenza elettrica R, giacente nello stesso piano orizzontale dei due fili e disposta come in figura. La spira è fissata in tale posizione (non può né traslare né ruotare) ed è equidistante dai due fili; in particolare la distanza tra un filo e il lato della spira ad esso più vicino, è pari a b (vedi figura).

1) Si determini il flusso totale del campo magnetico, $\Phi_{TOT}(B)$, attraverso la spira in funzione del tempo t.

2) Si determini la potenza istantanea, $W_{DISS}(t)$, dissipata sulla resistenza R della spira in funzione del tempo t.

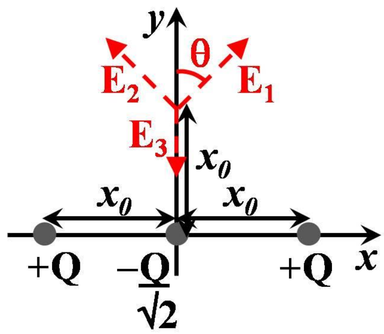
3) Si determini la potenza $\langle W_{DISS}\rangle$ mediamente dissipata sulla resistenza R della spira nel caso in cui $\omega_1=\omega_2$.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri I_{01}, I_{02}, ω_1, ω_2, a, b, R e dove occorre in funzione del tempo t]



Soluzione problema 1

Il campo elettrico totale sarà la somma vettoriale dei campi elettrici prodotti dalle singole cariche. La carica q_2 sul semiasse positivo delle x genera un campo di modulo E_2 in posizione **R**:



$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x_0^2 + x_0^2\right)}$$

$$E_2 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 x_0^2}$$

diretto come in figura.

La carica q_1 sul semiasse negativo genera un campo E_1 di modulo pari a E_2, per motivi di simmetria, ma con direzione rappresentata in figura:

$$E_1 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 x_0^2}$$

La loro somma vettoriale produce un campo parallelo all'asse y e diretto verso l'alto, cioè le componenti orizzontali di questi due campi si annullano mentre le componenti verticali si sommano. Detto θ l'angolo fra il campo $\mathbf{E_1}$ e l'asse y (vedi figura), il modulo del vettore $\mathbf{E_1}$+$\mathbf{E_2}$ è dato da:

$$\left|\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}\right| = 2E_1 \cos\theta$$

$$\left|\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}\right| = 2E_1 \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + x_0^2}}$$

$$\left|\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}\right| = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0^2}$$

La carica q_3 invece genera un campo parallelo all'asse y ma diretto verso il basso; il suo modulo E_3 è dato da:

$$E_3 = \frac{Q/\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2}$$

Il campo totale $\mathbf{E_{TOT}}$ avrà modulo pari alla differenza delle ultime due espressioni:

$$\left|\mathbf{E_{TOT}}\right| = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0^2} - \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0^2} = 0$$

Per quanto riguarda il potenziale elettrico V_{TOT} generato nel punto **R**, esso sarà la somma dei potenziali generati dalle singole cariche. La carica q_1 genera il seguente potenziale V_1:

$$V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left(x_0^2 + x_0^2\right)^{1/2}}$$

$$V_1 = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Per motivi di simmetria il potenziale V_2 generato dalla carica q_2 è lo stesso:

$$V_2 = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Il ponteziale V_3 generato dalla carica q_3 è invece pari a:

$$V_3 = \frac{-Q/\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 x_0}$$

La somma di questi tre contributi fornisce il potenziale totale generato nel punto **R**:

$$V_{TOT} = V_1 + V_2 + V_3$$

$$V_{TOT} = 2 \cdot \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0} - \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0}$$

$$V_{TOT} = \frac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 x_0}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Dato che R, L e C sono in serie, l'impedenza complessa totale Z_{TOT} è la somma delle singole impedenze complesse:

$$Z_{TOT} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$Z_{TOT} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Il modulo Z_0 dell'impedenza complessa Z_{TOT} è dato da (per definizione del modulo di un numero complesso):

$$Z_0 = \sqrt{Z^*_{TOT} Z_{TOT}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\left[R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}$$

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Invece la fase ϕ dell'impedenza Z_{TOT} è tale che la sua tangente è data da:

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{Im}(Z_{TOT})}{\mathrm{Re}(Z_{TOT})} = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$$

Punto 2): Applicando il metodo simbolico con i fasori di corrente e tensione, si ha:

$$\vec{V} = Z_{TOT}\vec{I}$$

$$V_0 e^{j\omega t} e^{j\alpha} = Z_0 e^{j\phi} I_0 e^{j\omega t}$$

dove si è tenuto conto della notazione polare dell'impedenza complessa, $Z_{TOT}=Z_0 e^{j\phi}$, e si è imposta fase zero per il fasore di corrente. Semplificando l'ultima espressione si ottiene che:

$$V_0 e^{j\alpha} = Z_0 I_0 e^{j\phi}$$

da cui segue che:
$$V_0 = Z_0 I_0$$
$$\alpha = \phi$$

Si vede quindi che lo sfasamento α fra corrente I e tensione del generatore V è pari alla fase ϕ dell'impedenza complessa. Inoltre l'ampiezza della corrente I è pari a I_0:
$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0}$$
$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Ne segue che la corrente reale che circola nel circuito è pari a:
$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$
$$I(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Punto 3): Nota la corrente che circola nel circuito (sia come fasore che come corrente reale) e detti Z_R e Z_L le impedenze complesse di R e L, è possibile calcolare i potenziali V_{AB} e V_{EF} applicando la legge di Ohm nel caso simbolico:
$$\begin{cases} \vec{V}_{AB} = Z_R \vec{I} \\ \vec{V}_{EF} = Z_L \vec{I} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \vec{V}_{AB} = R I_0 e^{j\omega t} \\ \vec{V}_{EF} = j\omega L I_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \vec{V}_{AB} = R I_0 e^{j\omega t} \\ \vec{V}_{EF} = \omega L I_0 e^{j\omega t} e^{j\pi/2} \end{cases}$$

Trovati i fasori dei potenziali ai capi AB e EF, per i rispettivi potenziali reali basta prendere la parte reale dei fasori:
$$\begin{cases} V_{AB}(t) = R I_0 \cos(\omega t) \\ V_{EF}(t) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \pi/2) \end{cases}$$
$$\begin{cases} V_{AB}(t) = \dfrac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t) \\ V_{EF}(t) = \dfrac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t + \pi/2) \end{cases}$$

Punto 4): Lo sfasamento fra $V_{AB}(t)$ e $V_{EF}(t)$ è evidentemente pari a $\pi/2$. Dato che i denominatori delle ultime espressioni trovate sono uguali, si ha che $V_{AB}(t)$ e $V_{EF}(t)$ hanno la stessa ampiezza quando:

$$V_0 R = \omega L V_0$$

$$\omega = \frac{R}{L}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): I due fili producono ciascuno un campo magnetico, rispettivamente di modulo B_1 e B_2; in un punto generico della spira a distanza x dal filo nr.1, si genera il campo magnetico tipico di un filo infinito. Il suo modulo è pari a $B_1(x)$:

$$B_1(x) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

ed è perpendicolare alla superficie della spira. In particolare per t=0sec la corrente I_1 è diretta verso l'alto e quindi il campo B_1 avrà verso entrante nella spira in figura.

Siccome la corrente $I_1=I_{01}\cos(\omega_1 t)$ dipende dal tempo t, anche il campo B_1 sarà funzione di t:

$$B_1(x,t) = \frac{\mu_0 I_{01}}{2\pi x}\cos(\omega_1 t)$$

Poiché vi è dipendenza da x, il campo B_1 varia di intensità man mano che andiamo dalla parte di spira più vicina al filo nr.1 a quella più lontana. Se però consideriamo una sottile fettina verticale di spira, avente altezza a (il lato della spira) e larghezza dx, possiamo assumere il campo B_1 uniforme su questo tratto di spira. Allora il flusso infinitesimo $d\Phi_1(B_1)$ generato da B_1 sulla parte di spira di area $a\cdot dx$ è data da:

$$d\Phi_1(B_1) = B_1(x,t)\cdot a \cdot dx$$

$$d\Phi_1(B_1) = \frac{\mu_0 I_{01}}{2\pi x}\cos(\omega_1 t)\cdot a \cdot dx$$

e come puntualizzato sopra si tratta di un flusso entrante in figura per t=0sec.

Il flusso $\Phi_1(B_1)$ su tutta la spira, dovuto al campo B_1, si ottiene mediante integrazione sulla coordinata x:

$$\Phi_1(B_1) = \int d\Phi_1(B_1) = \frac{\mu_0 I_{01}}{2\pi} a\cos(\omega_1 t)\cdot \int_b^{b+a} \frac{dx}{x}$$

$$\Phi_1(B_1) = \frac{\mu_0 I_{01}}{2\pi} a\cos(\omega_1 t)\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

Per il filo nr.2 si ha una situazione del tutto analoga e completamente simmetrica, data l'equidistanza della spira dai due fili. L'unica differenza è che per t=0sec anche la corrente I_2 è diretta verso l'alto e quindi genera un campo magnetico B_2 uscente dalla spira. Di conseguenza il flusso $\Phi_2(B_2)$ su tutta la spira dovuto al campo B_2 è un flusso uscente che si oppone a $\Phi_1(B_1)$. Il suo modulo, ripetendo un calcolo simile a quello appena eseguito, sarà pari a:

$$\Phi_2(B_2) = \frac{\mu_0 I_{02}}{2\pi} a\cos(\omega_2 t)\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

Il flusso totale $\Phi_{TOT}(B)$ sarà dato dalla somma algebrica di $\Phi_1(B_1)$ e $\Phi_2(B_2)$; prendendo come verso positivo il verso entrante nel foglio, e nella spira, in figura si ha che:

$$\Phi_{TOT}(B) = \Phi_1(B_1) - \Phi_2(B_2)$$

$$\Phi_{TOT}(B) = \frac{\mu_0 I_{01}}{2\pi} a \cos(\omega_1 t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) - \frac{\mu_0 I_{02}}{2\pi} a \cos(\omega_2 t) \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)$$

$$\Phi_{TOT}(B) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \cdot \left[I_{01} \cos(\omega_1 t) - I_{02} \cos(\omega_2 t)\right]$$

Il segno "meno" di fronte a $\Phi_2(B_2)$ sta a indicare che tale flusso è uscente dal foglio (si è scelto come verso positivo quello entrante nel foglio). Siccome il flusso totale $\Phi_{TOT}(B)$ dipende dal tempo t attraverso delle funzioni periodiche (le funzioni coseno) esso sarà entrante in certi istanti e uscente in altri istanti, a seconda dei valori di I_{01}, I_{02}, ω_1 e ω_2.

Punto 2): Noto il flusso totale $\Phi_{TOT}(B)$ attraverso la spira in funzione del tempo t, possiamo calcolare al forza elettromotrice indotta, f_{ind}, sulla spira mediante l'induzione di Faraday:

$$f_{ind} = -\frac{d\Phi_{TOT}}{dt}$$

$$f_{ind} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left[I_{01} \cos(\omega_1 t) - I_{02} \cos(\omega_2 t)\right]$$

$$f_{ind} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \cdot \left[-I_{01}\omega_1 \sin(\omega_1 t) + I_{02}\omega_2 \sin(\omega_2 t)\right]$$

$$f_{ind} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \cdot \left[I_{01}\omega_1 \sin(\omega_1 t) - I_{02}\omega_2 \sin(\omega_2 t)\right]$$

Poiché abbiamo scelto come verso positivo il verso di $\Phi_{TOT}(B)$ entrante nella spira, in figura, una forza elettromotrice indotta f_{ind} positiva indica una corrente indotta che gira in senso orario in figura (e viceversa). Comunque siamo interessati a trovare il valore della potenza dissipata, e a tal fine il verso della corrente non è importante. E' invece importante il fatto che i due contributi, quello di I_1 e di I_2, siano di segno opposto (segno "meno" nella parentesi quadra dell'ultima espressione).

Dalla f_{ind} possiamo ricavare la corrente indotta mediante la legge di Ohm:

$$I_{ind} = \frac{f_{ind}}{R}$$

$$I_{ind} = \frac{\mu_0 a}{2\pi R} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right) \cdot \left[I_{01}\omega_1 \sin(\omega_1 t) - I_{02}\omega_2 \sin(\omega_2 t)\right]$$

Infine la potenza istantanea dissipata per effetto Joule sarà:

$$W_{DISS}(t) = I_{ind}^2 R$$

$$W_{DISS}(t) = \left[\frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right]^2 \frac{1}{R}\left[I_{01}\omega_1 \sin(\omega_1 t) - I_{02}\omega_2 \sin(\omega_2 t)\right]^2$$

Punto 3): Quando $\omega_1 = \omega_2$, la potenza istantanea dissipata per effetto Joule diventa (dall'ultima equazione trovata al punto 2):

$$W_{DISS}(t)=\left[\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right]^2\frac{1}{R}\left[I_{01}\omega_1\sin(\omega_1 t)-I_{02}\omega_1\sin(\omega_1 t)\right]^2$$

$$W_{DISS}(t)=\left[\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right]^2\frac{(I_{01}-I_{02})^2}{R}\omega_1^2\sin^2(\omega_1 t)$$

dove si è sostituito a ω_2 il valore ω_1.

La potenza media dissipata sarà allora la media temporale della precedente espressione; dato che l'unica dipendenza dal tempo t è attraverso la funzione $\sin^2(\omega_1 t)$ basta calcolare la media temporale di tale funzione:

$$\left\langle \sin^2(\omega_1 t)\right\rangle=\frac{1}{T}\int_T \sin^2(\omega_1 t)dt=\frac{1}{2}$$

Di conseguenza la potenza media dissipata, $\langle W_{DISS}\rangle$, sarà semplicemente:

$$\left\langle W_{DISS}\right\rangle=\left[\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{b+a}{b}\right)\right]^2\frac{\omega_1^2}{2R}(I_{01}-I_{02})^2$$