Risultati esame scritto Fisica 2 - 22/06/2015
orali: 29-06-2015 alle ore 09.00 presso aula G6

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
114983	13	
114561	10	
112836	14	
118501	24	ammesso
114914	14	
112884	nc	
109937	17	ammesso
114921	15	
116351	19	ammesso
115618	nc	
109938	14	
118465	15	
121147	19	ammesso
118451	17	ammesso
109862	13	
118606	17	ammesso

nc=non classificato

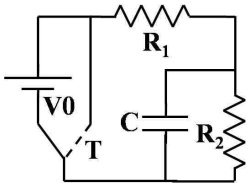
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 22/06/2015

Problema 1

Sia dato il circuito in figura con R_1=30Ω, R_2=2R_1, V_0=3V e C=5μF. Si calcoli il valore della carica Q presente sulle piastre del condensatore C quando la corrente nel circuito è a regime. All'istante t=0sec viene spostato l'interruttore T, escludendo dal circuito il generatore di tensione V_0. Qual è la costante di tempo τ con cui si scarica il condensatore C?



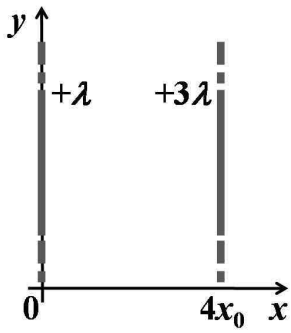
Problema 2

Siano dati due fili conduttori rettilinei, infiniti e paralleli. Il primo coincide con l'asse y di un sitema di riferimento (x,y) e ha densità di carica lineare uniforme positiva e pari a +λ, mentre il secondo si trova in posizione 4x_0 (vedi figura) e ha densità di carica lineare positiva e pari a +3λ.

1) Determinare il vettore campo elettrico **E** nel piano (x,y) e per quale valore di x=x_{eq} esso è pari a zero. [Per il camo **E** si esprima il risultato in funzione dei parametri λ e x_0, oltre alla posizione x]

2) Determinare la funzione potenziale elettrico $V(x)$ nella regione 0<x<4x_0, imponendo che esso sia pari a zero per x=x_{eq}. [Si esprima il risultato in funzione dei parametri λ e x_0, oltre alla posizione x]

3) Data una carica di prova positiva +q, con carica sufficientemente piccola da non alterare il campo elettrico **E** generato dai fili, si calcoli il lavoro compiuto per portare +q da x_1=x_{eq} fino x_2=3·x_{eq}. [Si esprima il risultato in funzione dei parametri q e λ]



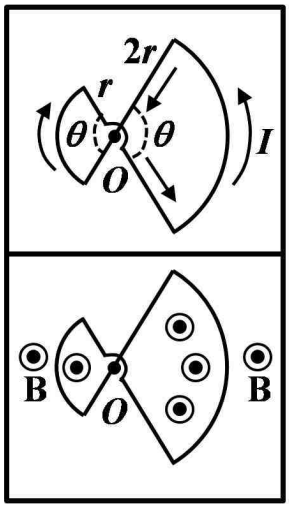
Problema 3

Sia dato una spira conduttrice formata da due archi di circonferenza con lo stesso angolo al centro θ, ma di raggi pari a r e 2r, collegati da due fili rettilinei passanti per il centro dei due archi di circonferenza, come mostrato in figura. Nella posizione O coincidente col centro dei due archi, i due fili rettilinei si intersecano ma sono isolati fra loro (cioè NON costituiscono un nodo di circuito).

1) Detta I la corrente elettrica continua che circola nella spira (nel verso rappresentato nella figura sopra), si calcoli il vettore di induzione magnetica **B** nel punto O. [Si esprima il risultato in funzione dei parametri I, θ, r]

2) Si consideri la stessa spira in assenza di corrente I, ma immersa in un campo di induzione magnetica uniforme nello spazio, perpendicolare alla superficie della spira e di modulo B oscillante nel tempo: $B(t)=B_0\cos(\omega t)$ (vedi figura sotto); si determini la forza elettromotrice, f_{ind}, indotta nella spira (si trascuri qualsiasi effetto di mutua induzione fra le due parti di spira). [L'area di una porzione di cerchio di raggio R, che sottintende un angolo al centro θ, è pari a $R^2\theta/2$; si esprima il risultato in funzione dei parametri r, θ, B_0, ω, oltre al tempo t]

3) Detta A la sezione del filo conduttore della spira, e sapendo che la resistività elettrica della spira è pari a ρ per gli archi di circonferenza ed è pari a zero per i tratti di filo rettilinei, determinare la corrente elettrica I_{ind} indotta nella spira da f_{ind}. [Si esprima il risultato in funzione dei parametri r, A, B_0, ω, ρ]



Soluzione problema 1

Quando il circuito è a regime, non c'è corrente che passa sul condensatore *C*. Allora applicando la legge di Ohm all'unica maglia del circuito si ottiene che:

$$V_0 = (R_1 + R_2)I$$

$$I = \frac{V_0}{(R_1 + R_2)} = \frac{V_0}{3R_1}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore è allora:

$$V_C = IR_2 = \frac{V_0}{3R_1} 2R_1 = \frac{2V_0}{3}$$

Ne segue per la carica *Q* sulle piastre del condensatore:

$$Q = CV_C = \frac{2}{3} CV_0 = 10\mu\text{C}$$

Dopo che l'interruttore *T* esclude dal circuito il generatore V_0, il condensatore *C* si scarica sul parallelo delle resistenze R_1 e R_2. Il valore R_{tot} del parallelo di resistenze è dato da:

$$R_{tot} = \frac{2}{3} R_1$$

Ne segue che la costante di tempo τ con cui si scarica il condensatore è pari a:

$$\tau = R_{tot} C = \frac{2}{3} R_1 C = 0.1\text{ms}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Per un filo infinito con densità di carica lineare pari a $+\lambda$ si ha un campo elettrico radiale (con simmetria cilindrica), uscente dal filo e con modulo pari a:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

dove *x* è la distanza dal filo. Il primo filo genera allora nel piano (*x*,*y*) un campo elettrico con direzione orizzontale (parallelo all'asse *x*) e pari a:

$$E_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

Si noti che dove E_1 è positivo (per $x>0$) il campo elettrico è concorde all'asse *x* della figura (diretto verso destra), e dove esso è negativo (per $x<0$) esso è discorde dall'asse *x* (diretto verso sinistra).

Per il secondo filo si ha una situazione analoga, ma centrata in $x=4\cdot x_0$:

$$E_2 = \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x - 4x_0)}$$

Vale un discorso analogo a quello fatto per E_1: dove E_2 è positivo ($x>4x_0$) esso è orientato verso destra, dove E_2 è negativo ($x<4x_0$) esso è orientato verso sinistra.

Si noti che E_1 e E_2 sono concordi e orientati verso sinstra per $x<x_0$ e orientati verso destra per $x>4x_0$; invece per $0<x<4x_0$ essi sono discordi. Il campo elettrico totale è pari alla somma di E_1 con E_2:

$$E_{TOT} = E_1 + E_2$$

$$E_{TOT} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} + \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x - 4x_0)}$$

$$E_{TOT} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x} + \frac{3}{(x-4x_0)}\right]$$

Il campo elettrico E_{TOT}=0 quando il termine fra parentesi quadre è nullo:

$$\frac{1}{x} = -\frac{3}{(x-4x_0)}$$

$$3x = -x + 4x_0$$

$$x = x_0$$

Ne segue che $x_{eq}=x_0$.

Punto 2): Dalla definizione di potenziale elettrico $V(x)$ si ha che:

$$V(x) - V_0 = -\int_{xeq}^{x} E_{TOT}\, dx$$

Il potenziale $V(x)$ e l'integrale dipendono solo da x perché il campo elettrico E_{TOT} ha componente solo lungo l'asse x. Sostituendo nell'ultima formula l'espressione del campo E_{TOT} e tenendo conto che $x_{eq}=x_0$, si ottiene che:

$$V(x) - V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x0}^{x}\left[\frac{1}{x} + \frac{3}{(x-4x_0)}\right]dx$$

$$V(x) - V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\int_{x0}^{x}\frac{1}{x}dx + \int_{x0}^{x}\frac{3}{(x-4x_0)}dx\right]$$

$$V(x) - V_0 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + 3\ln\left(\frac{x-4x_0}{-3x_0}\right)\right]$$

$$V(x) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) + 3\ln\left(\frac{4x_0-x}{3x_0}\right)\right]$$

dove nell'ultimo passaggio si è imposto V_0=0 per $x=x_{eq}=x_0$, come richiesto dal problema.

Punto 3): Il lavoro compiuto per portare la carica di prova $+q$ da $x_1=x_{eq}=x_0$ fino a $x_2=3x_{eq}=3x_0$ è dato da:

$$W = qV(x_1) - qV(x_2)$$

A tal proposito valutiamo $V(x_1)$ e $V(x_2)$ dall'espressione del potenziale trovata al punto 2). Come imposto mediante $V(x)$=0 per $x=x_0$, per $V(x_1)$ si ottiene che:

$$V(x_1) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{x_0}{x_0}\right) + 3\ln\left(\frac{4x_0-x_0}{3x_0}\right)\right] = 0$$

Per $x=x_2=3x_0$ si ha invece che:

$$V(x_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{3x_0}{x_0}\right) + 3\ln\left(\frac{4x_0-3x_0}{3x_0}\right)\right]$$

$$V(x_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(3) + 3\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

$$V(x_2) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln(3) - 3\ln(3)]$$

$$V(x_2) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln(3)$$

Ne segue che il lavoro fatto dal campo elettrico E_{TOT} è pari a:

$$W = -\frac{q\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln(3)$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Il modulo del campo magnetico B generato da una spira circolare nel suo centro è pari a:

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2R^3} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

dove R è il raggio della spira e il verso del campo magnetico è uscente dalla spira per corrente che circola in senso antiorario. Nel caso del problema si hanno due archi di circonferenza di angolo pari a θ, quindi il campo magentico generato sarà una frazione di quello espresso nella precedente formula:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}$$

dove $\theta/2\pi$ rappresenta la frazione di angolo giro che genera il campo magnetico.

Per quanto riguarda l'arco a destra nella figura, si ha il raggio R=2r e il verso della corrente è antiorario, per cui il campo B_{2r} generato da questo arco nel punto O è uscente dal foglio e pari a:

$$B_{2r} = \frac{\mu_0 I}{2(2r)}\frac{\theta}{2\pi} = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\frac{1}{2r}$$

L'arco di circonferenza a sinistra ha raggio R=r e il verso della corrente è orario, per cui il campo B_r generato da esso nel punto O è entrante nel foglio e pari a:

$$B_r = -\frac{\mu_0 I}{2(r)}\frac{\theta}{2\pi} = -\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\frac{1}{r}$$

dove il segno "meno" tiene conto del fatto che il campo è entrante nel foglio.

Per quanto riguarda i tratti di filo rettilinei, essi non generano campo magnetico B perché $\mathbf{\Delta l}$ e $\mathbf{\Delta r}$ nella formula di Biot-Savart:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{\mathbf{\Delta l}\times\mathbf{\Delta r}}{|\Delta r|^3}$$

sono paralleli per i tratti rettilinei di filo e quindi il loro prodotto vettoriale è nullo.

Ne segue che il campo magnetico totale, B_{TOT}, nel punto O è la somma di B_{2r} e B_r:

$$B_{TOT} = B_{2r} + B_r$$

$$B_{TOT} = \frac{\mu_0 I\theta}{4\pi}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{r}\right)$$

$$B_{TOT} = -\frac{\mu_0 I\theta}{8\pi r}$$

Punto 2): In presenza di un campo magnetico oscillante si ha forza elettromotrice indotta nella spira per il fenomeno dell'induzione di Faraday; dato che sono trascurabili gli effetti di mutua induzione fra le due parti della spira, possiamo trattarle separatamente. Il flusso del campo magnetico $B(t)=B_0\cos(\omega t)$; attraverso la parte di destra della spira è pari a:

$$\Phi_{2r}(B) = B_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{(2r)^2 \theta}{2}$$

$$\Phi_{2r}(B) = 2\theta r^2 B_0 \cos(\omega t)$$

Il modulo della forza elettromotrice $f_{i,2r}$ indotta in questa parte di spira è pari a:

$$f_{i,2r} = \left| -\frac{d\Phi_{2r}(B)}{dt} \right| = 2\theta r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

Il campo magnetico $B(t)$ è oscillante; consideriamo un intervallo di tempo dt in cui il campo esterno $B(t)$ è uscente dal foglio ma sta diminuendo di intensità. Per la legge di Lenz, la forza elettromotrice $f_{i,2r}$ indotta nella parte a destra della spira si oppone a questa diminuzione di flusso uscente e cerca di produrre un campo magnetico uscente, generando corrente in senso antiorario.

Ripetiamo un discorso analogo per il lato sinistro della spira. Il flusso in questo lato della spira è pari a:

$$\Phi_r(B) = B_0 \cos(\omega t) \cdot \frac{r^2 \theta}{2}$$

$$\Phi_r(B) = \frac{1}{2}\theta r^2 B_0 \cos(\omega t)$$

Il modulo della forza elettromotrice indotta in questa parte di spira è pari a:

$$f_{i,r} = \left| -\frac{d\Phi_r(B)}{dt} \right| = \frac{1}{2}\theta r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

Considerando lo stesso intevallo di tempo dt di cui sopra, anche in questa parte di spira si ha una diminuzione di flusso uscente e la forza elettromotrice indotta $f_{i,r}$ spinge in senso antiorario. Ma dato che i due tratti rettilinei di filo che uniscono i due archi si intersecano nel punto O, il senso antiorario di $f_{i,r}$ si oppone a quello di $f_{i,2r}$. Questo significa che le due forze elettromotrici indotte sono fra di loro opposte e la forza elettromotrice totale f_{ind} indotta nella spira è pari alla loro differenza:

$$f_{ind} = f_{i,2r} - f_{i,r}$$

$$f_{ind} = \left(2 - \frac{1}{2}\right)\theta r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

$$f_{ind} = \frac{3}{2}\theta r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)$$

Punto 3): Dalla sezione A del filo conduttore e dalla resistività ρ si calcola la resistenza elettrica R_{el} della spira, considerando che i tratti di filo rettilinei hanno resistenza nulla. In generale per un conduttore si ha che $R_{el}=\rho l/A$, dove l è la lunghezza del conduttore. In questo caso si ha che:

$$R_{el} = \rho \frac{l}{A}$$

$$R_{el} = \rho \frac{2r\theta + r\theta}{A} = \frac{3r\theta\rho}{A}$$

Nota la R_{el}, la corrente indotta nella spira si ricava applicando la legge di Ohm alla forza elettromotrice indotta f_{ind} determinata al punto 2):

$$I_{ind} = \frac{f_{ind}}{R_{el}}$$

$$I_{ind} = \frac{\frac{3}{2}\theta r^2 B_0 \omega \sin(\omega t)}{\frac{3r\theta\rho}{A}}$$

$$I_{ind} = \frac{B_0 A r}{2\rho}\omega \sin(\omega t)$$