Risultati esame scritto Fisica 2 - 09/09/2015
orali: 29-09-2015 alle ore 10.30 presso aula F

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
112652	14	
114893	10	
114912	15	
115088	11	
110667	12	
116764	15	
114921	11	
114915	nc	
112892	10	
114927	11	
114923	20	ammesso
114919	13	
118497	12	
114979	nc	
109862	nc	
114868	19	ammesso
118606	11	

nc=non classificato

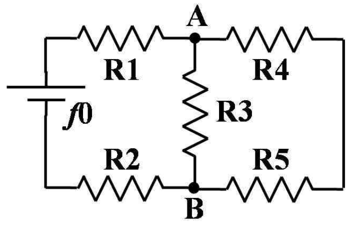
Per gli studenti del N.O.: possono sostenere l'esame di Fisica 2 solo gli studenti che hanno superato l'esame di Fisica 1

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 09/09/2015

Problema 1

Sia dato il circuito rappresentato in figura con le resistenze elettriche pari a R_1=1.0Ω, R_2=2.0Ω, R_3=3.0Ω, R_4=4.0Ω, R_5=5.0Ω, e la forza elettromotrice f_0=10.0V. Si determini la corrente che circola sulla resistenza R_3 e la differenza di potenziale, ΔV_{AB}, fra i punti A e B del circuito.



Problema 2

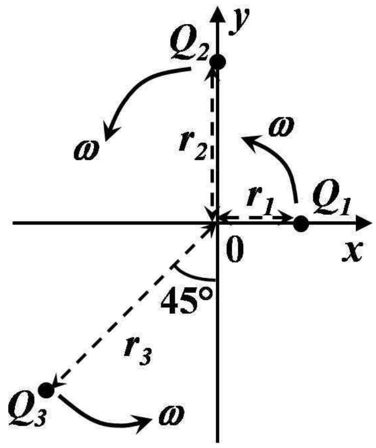
Siano date tre cariche puntiformi, Q_1=Q, Q_2=2Q e Q_3=3Q (con $Q > 0$), disposte come in figura. In particolare la carica Q_1 si trova inizialmente sul semiasse positivo delle x a distanza r_1=r dall'origine del sistema di riferimento; la carica Q_2 si trova inizialmente sul semiasse positivo delle y a distanza r_2=2r dall'origine; la carica Q_3 si trova nel III quadrante del sistema di riferimento, lungo la bisettrice del I e III quadrante, a distanza r_3=3r dall'origine (vedi figura).

1) Determinare il vettore campo elettrico totale, $\mathbf{E_{TOT}}$, generato nell'origine del sistema di riferimento dalle cariche Q_1, Q_2 e Q_3 quando esse sono in quiete.

2) Si supponga che le cariche Q_1, Q_2 e Q_3 si muovano di moto circolare uniforme (nel piano x,y) avente come centro l'origine del sistema di riferimento e in senso antiorario in figura, con pulsazione ω=2π/T (T è il periodo di rivoluzione); determinare il vettore campo magnetico totale, $\mathbf{B_{TOT}}$, generato nell'origine del sistema di riferimento (si trascuri l'interazione fra campo magnetico e cariche elettriche).

3) Nel caso di cariche elettriche in moto circolare uniforme (come descritto al punto 2), si calcoli il rapporto fra il modulo del campo elettrico e del campo magnetico prodotti nell'origine del sistema di riferimento.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: Q, r, ω, e ove necessario delle costanti universali]



Problema 3

Sia dato un circuito come quello in figura disposto nel piano orizzontale e costituito da due binari conduttori paralleli separati da una distanza l, chiusi a sinistra da una barra conduttrice rigida e fissa, e a destra da una barra mobile di massa m in grado di scorrere sui binari senza attrito. La barra a sinistra contiene un condensatore di capacità C, inizialmente scarico, e una resistenza elettrica R, mentre il resto del circuito ha resistenza elettrica trascurabile. Tutto il circuito è immerso in un campo magnetico B, uniforme nello spazio e costante nel tempo, perpendicolare alla superficie del circuito e orientato come in figura (verso l'alto). All'istante t=0sec la barra mobile ha velocità iniziale $v_0 \neq 0$, verso destra in figura.

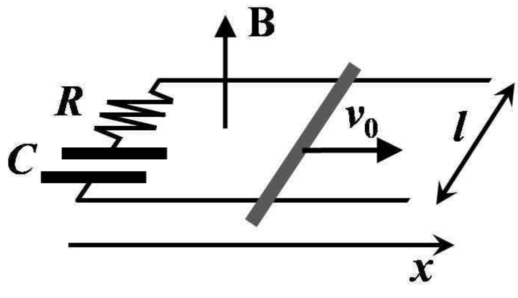
1) Determinare la corrente I=$I(t)$ che circola nel circuito in funzione del tempo t, per $t \geq 0$sec, specificando il verso di percorrenza.

2) Determinare la velocità v=$v(t)$ della barretta mobile in funzione del tempo t, per $t \geq 0$sec, trovando inoltre l'espressione di $v(t)$ per $t \to \infty$.

3) Determinare l'espressione della carica complessiva, Q=Q_∞, depositata sul condensatore per $t \to \infty$.

4) Determinare l'energia totale dissipata per effetto Joule sulla resistenza elettrica R, durante tutto il moto della barretta mobile.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: v_0, B, l, C, R, m, e ove necessario delle costanti universali]



Soluzione problema 1

Dato il circuito della figura, applichiamo il metodo delle maglie con 2 maglie. Scegliamo come maglia 1 (con corrente I_1) i rami esterni che comprendono il generatore di tensione e le resistenze R_1, R_4, R_2 e R_5; come maglia 2 (con corrente I_2) consideriamo la maglia sulla destra, che comprende le resistenze R_4, R_5 e R_3. Per entrambe le correnti scegliamo il verso orario in figura. Scrivendo le equazioni delle maglie si ottiene che:

$$\begin{cases} f_0 = (R_1 + R_2 + R_4 + R_5)I_1 + (R_4 + R_5)I_2 \\ 0 = (R_4 + R_5)I_1 + (R_3 + R_4 + R_5)I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10V = 12\Omega \cdot I_1 + 9\Omega \cdot I_2 \\ 0V = 9\Omega \cdot I_1 + 12\Omega \cdot I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_2 = -\dfrac{10}{7}\,\mathrm{A} = -1.43\mathrm{A} \\ I_1 = -\dfrac{4}{3} \cdot I_2 \end{cases}$$

Delle due correnti siamo interessati solo a I_2 che rappresenta l'unica corrente circolante su R_3; il fatto che essa sia negativa significa che in realtà I_2 non circola in senso orario come supposto sopra, ma in senso antiorario. Quindi la corrente su R_3 circola dal punto A al punto B del circuito (dall'alto verso il basso in figura), ed è pari a $|I_2|$=1.43A.

La differenza di tensione fra i punti A e B, ΔV_{AB}, è allora data da:

$$\Delta V_{AB} = I_2 \cdot R_3 = \frac{10}{7} \cdot 3\mathrm{V} = 4.29\mathrm{V}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Per determinare il campo elettrico totale, $\mathbf{E_{TOT}}$, nell'origine del sistema di riferimento, cerchiamo le espressioni vettoriali dei singoli campi $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$, generati dalle tre cariche. Nell'origine del sistema di riferimento tutti e tre questi campi giacciono nel piano x,y; inoltre tutti e tre questi campi hanno direzioni radiali uscenti dalla posizione delle singole cariche. Per i primi due, applicando la formula del campo generato da singola carica puntiforme, si trova che:

$$\mathbf{E_1} = -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\hat{\mathbf{x}} = \left(-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2};0\right)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\hat{\mathbf{y}} = \left(0;-\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 4r^2}\right) = \left(0;-\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

dove si è tenuto conto del fatto che il campo $\mathbf{E_1}$ è diretto lungo l'asse x (negativo) e il campo $\mathbf{E_2}$ lungo l'asse y (negativo), proprio perché radiali e uscenti dalle cariche. Il campo $\mathbf{E_3}$, per lo stesso motivo, giace lungo la bisettrice del I e III quadrante (forma un angolo di 45° con gli assi cartesiani), ed è diretto lungo le direzioni positive degli assi x e y. Calcoliamo il modulo, E_3, e otteniamo da questo le componenti lungo x e y moltiplicando per cos e sin di 45°:

$$E_3 = \frac{Q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2} = \frac{3Q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 9r^2} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathbf{E_3} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0 r^2}(\cos 45°;\sin 45°) = \left(\frac{Q}{12\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r^2};\frac{Q}{12\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r^2}\right)$$

Sommando le componenti lungo x e y dei tre campi trovati, si ottengono le componenti, $E_{TOT,x}$ e $E_{TOT,y}$, del campo elettrico totale $\mathbf{E}_{\mathbf{TOT}}$:

$$E_{TOT,x} = E_{1,x} + E_{2,x} + E_{3,x}$$

$$E_{TOT,x} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r^2}\left(-\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{-6\sqrt{2}+2}{24\sqrt{2}}\right) < 0$$

$$E_{TOT,y} = E_{1,y} + E_{2,y} + E_{3,y}$$

$$E_{TOT,y} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r^2}\left(0 - \frac{1}{8} + \frac{1}{12\sqrt{2}}\right) = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 r^2}\left(\frac{-3\sqrt{2}+2}{24\sqrt{2}}\right) < 0$$

Il rapporto $E_{TOT,y}/E_{TOT,x}$ fornisce la tangente dell'angolo θ che il campo elettrico forma con l'asse x:

$$\tan\theta = \frac{E_{TOT,y}}{E_{TOT,x}} = \frac{-3\sqrt{2}+2}{-6\sqrt{2}+2} \approx 0.35$$

$$\arctan(0.35) \approx 19.3° \text{ oppure } 199.3°$$

$$\theta \approx 199.3°$$

Dato che $E_{TOT,y}<0$ e $E_{TOT,x}<0$, la risultante del campo elettrico ha direzione nell'intervallo $180°<\theta<270°$ (III quadrante). Di conseguenza il valore accettabile per θ è $\theta \approx 199.3°$.

Il modulo del campo elettrico totale sarà dato da:

$$E_{TOT} = \sqrt{E_{TOT,x}^2 + E_{TOT,y}^2}$$

$$E_{TOT} = \frac{Q}{24\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{\left(-6\sqrt{2}+2\right)^2 + \left(-3\sqrt{2}+2\right)^2}$$

$$E_{TOT} = \frac{Q}{24\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{98 - 36\sqrt{2}}$$

$$E_{TOT} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\sqrt{\frac{98-36\sqrt{2}}{72}} \approx 0.81\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Punto 2): Ognuna delle cariche positivie che si muove di moto circolare uniforme in senso antiorario in figura può essere assimilata ad una spira circolare percorsa da corrente positiva in senso antiorario. Dato che per tutte e tre le cariche abbiamo la stessa pulsazione ω (e quindi lo stesso periodo T), le correnti I_1, I_2 e I_3 rispettivamente delle spire associate a Q_1, Q_2 e Q_3 sono date da:

$$I_1 = \frac{Q_1}{T} = \frac{\omega Q}{2\pi}$$

$$I_2 = \frac{Q_2}{T} = 2\frac{\omega Q}{2\pi} = \frac{\omega Q}{\pi}$$

$$I_3 = \frac{Q_3}{T} = \frac{3}{2}\frac{\omega Q}{\pi}$$

Le tre spire sono concentriche e hanno tutte come centro l'origine del sistema di riferimento. Il campo magnetico **B** generato da una spira nel centro di essa è diretta lungo l'asse perpendicolare alla spira, passante per il suo centro, e ha verso uscente se la corrente è vista girare in senso antiorario. Sfruttando la formula per il campo magnetico generato da una spira, si ha che i moduli dei campi magnetici, B_1 , B_2 e B_3, generati nell'origine del sistema di riferimento sono dati da:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1 r_1^2}{2r_1^3} = \frac{\mu_0 I_1}{2r_1} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi r}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2r_2} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi r}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I_3}{2r_3} = \frac{\mu_0 \omega Q}{4\pi r}$$

Come detto prima, tutti e tre i campi magnetici sono diretti perpendicolarmente al piano x,y in figura e uscente dal foglio. La loro risultante è allora un campo magnetico con stessa direzione e verso, e con modulo pari alla somma dei tre:

$$B_{TOT} = B_1 + B_2 + B_3$$

$$B_{TOT} = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 \omega Q}{\pi r}$$

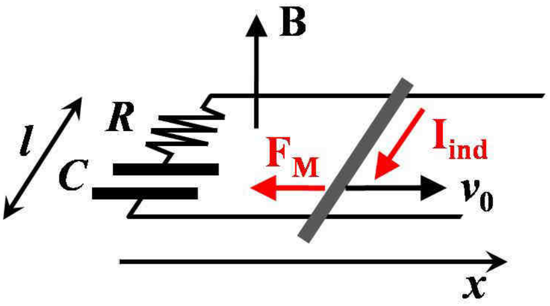
Punto 3): Quando le cariche sono in moto circolare uniforme, la risultante del vettore campo elettrico E_{TOT} ruoterà nel piano x,y, ma il suo modulo sarà invariato perché le cariche girano in maniera solidale l'una con l'altra. Come coseguenza i moduli di campo elettrico totale, E_{TOT}, e del campo magnetico totale, B_{TOT}, sono gli stessi calcolati ai punti precedenti, e il loro rapporto è dato da:

$$\frac{E_{TOT}}{B_{TOT}} \approx \frac{\dfrac{0.81 \cdot Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}{\dfrac{3}{4}\dfrac{\mu_0 \omega Q}{\pi r}} = \frac{0.81}{3\varepsilon_0 \mu_0 \omega r}$$

$$\frac{E_{TOT}}{B_{TOT}} \approx 0.27 \frac{c^2}{v_1}$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che la velocità della luce nel vuoto, c, è pari a $c=1/\sqrt{(\varepsilon_0\mu_0)}$, e il modulo della velocità con cui si muove la carica Q_1 è pari a $v_1=2\pi r/T=\omega r$.

Soluzione problema 3



Punto 1): Inizialmente la barretta mobile, a destra nel circuito, si muove con velocità v_0 verso destra. Questo produce un aumento dell'area del circuito associata al campo magnetico B, e per l'induzione di Faraday si ha una forza elettromotrice indotta, f_{ind}, pari a:

$$\Phi(B) = Blx \rightarrow f_{ind} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = Bl\frac{dx}{dt}$$

$$f_{ind} = Blv(t)$$

dove nell'ultimo passaggio si è considerato che $dx/dt=v(t)$, con la velocità v che dipende dal tempo t. Cosiderando positivo l'asse x riportato in figura, si ha che $v(t)$ è positiva quando la barretta si muove verso destra. Quando questo accade, si ha un aumento del flusso di B, $\Phi(B)$, verso l'alto (in figura). Per la legge di Lenz la forza elettromotrice indotta si oppone a questa variazione di $\Phi(B)$ e circola corrente indotta, I, in

senso orario nel circuito. Questa corrente produce un accumulo di carica sul condensatore C: man mano che la carica $Q(t)$ si accumula sul condensatore, la d.d.p. ai capi di C si oppone al passaggio di corrente. Quindi si ha un processo analogo alla carica di un condensatore, ma in questo caso la forza elettromotrice che carica C è data dall'induzione di Faraday e dalla forza elettromotrice indotta, f_{ind}.
Abbiamo allora nel circuito due generatori di tensione quasi-statica, uno legato alla f_{ind} e uno a C:

$$\Delta V_B = f_{ind} = Blv(t)$$

$$\Delta V_C = \frac{Q(t)}{C}$$

La prima spinge la corrente $I(t)$ in senso orario in figura per $v(t)>0$ (v diretta verso destra); la seconda si oppone, dato che cresce la carica $Q(t)$ accumulata su C dalla corrente $I(t)$, esattamente come accade nella carica del condensatore. Le due d.d.p. sono allora opposte fra loro, e prendendo positivo il verso della corrente $I(t)$ orario in figura, l'equazione della maglia si scrive come (legge di Ohm):

$$\Delta V_B - \Delta V_C = RI(t)$$

$$Blv(t) - \frac{Q(t)}{C} = RI(t) \qquad \text{(Eq.1)}$$

Si tenga presente che man mano che circola corrente positiva $I(t)$ nel circuito (scelta positiva in verso orario) si ha un aumento di carica su C, e la relazione fra $Q(t)$ e $I(t)$ è data esattamente da:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Per determinare la corrente $I(t)$ dalla penultima equazione, è necessario avere qualche informazione maggiore sulla velocità $v(t)$ della barretta. A tal proposito consideriamo che per corrente positiva che circola in senso orario nel circuito, si ha corrente $I(t)$ che circola sulla barretta mobile. Si ha allora una corrente immersa in campo magnetico B, per cui si ha un'azione meccanica, $\mathbf{F_M}$, sulla barretta:

$$\mathbf{F_M} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

$$F_M = BlI(t)$$

dove la forza $\mathbf{F_M}$ è diretta verso sinistra per corrente $I(t)$ che gira in senso orario, quindi per velocità $v(t)$ positiva (diretta verso destra). Ne consegue che $\mathbf{F_M}$ e $v(t)$ sono opposte fra loro, e che $\mathbf{F_M}$ rallenta il moto della barretta. Dato che l'unica forza agente sulla barretta è proprio $\mathbf{F_M}$, il II principio della dinamica si scrive come:

$$ma = -BlI(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Bl}{m} I(t)$$

Dato che abbiamo informazioni sulla derivata della velocità $v(t)$, facciamo la derivata dell'equazione (Eq. 1):

$$Blv(t) - \frac{Q(t)}{C} = RI(t) \qquad \text{(Eq.1)}$$

$$Bl\frac{dv}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = R\frac{dI}{dt}$$

Sostituiamo che $dQ/dt=I(t)$ e il risultato trovato prima per dv/dt:

$$-\frac{B^2l^2}{m} I(t) - \frac{1}{C} I(t) = R\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\left(\frac{B^2l^2}{mR} + \frac{1}{RC}\right) I(t)$$

Quest'ultima rappresenta un'equazione differenziale per la corrente $I(t)$ risolvibile mediante separazione di variabili; definiamo il parametro α:

$$\alpha = \frac{B^2 l^2}{mR} + \frac{1}{RC}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\alpha I$$

Integrando fra l'istante iniziale (t=0, I=I_0) e un istante generico t, si ottiene che:

$$\int_{I0}^{I} \frac{dI}{I} = -\int_0^t \alpha dt$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\alpha t$$

$$I(t) = I_0 e^{-\alpha t}$$

Per t=0sec si ha che la velocità è pari a v_0 (verso destra), la carica accumulata sul condensatore è pari a 0, e allora l'Eq.1 diventa:

$$Blv_0 - 0 = RI_0$$

$$I_0 = \frac{Blv_0}{R}$$

Sostituendo questa espressione per I_0 e l'espressione di α, si ottiene l'andamento della corrente $I(t)$:

$$I(t) = \frac{Blv_0}{R} \exp\left[-\left(\frac{B^2 l^2}{mR} + \frac{1}{RC} \right) t \right]$$

$$I(t) = \frac{Blv_0}{R} \exp\left[-\frac{t}{RC} \right] \cdot \exp\left[-\frac{B^2 l^2}{mR} t \right]$$

Come si vede la corrente tende esponenzialmente a zero per $t \rightarrow \infty$, ma con due tempi caratteristici legati rispettivamente al processo di carica di un condensatore (τ_C=RC) e all'azione frenante del campo magnetico B nel flusso tagliato (τ_B=$mR/B^2 l^2$).

Punto 2): Nota dal punto 1) la corrente $I(t)$=$I_0 e^{-\alpha t}$= $(Bl/R)v_0 e^{-\alpha t}$, determiniamo la velocità $v(t)$ dal II principio della dinamica scritto precedentemente:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Bl}{m} I(t) = -\frac{Bl}{m} I_0 e^{-\alpha t}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2 l^2}{mR} v_0 e^{-\alpha t}$$

Integrando quest'ultima equazione fra l'istante t=0sec e l'istante t generico si ottiene che:

$$\int_{v0}^{v} dv = -\frac{B^2 l^2}{mR} v_0 \int_0^t e^{-\alpha t} dt$$

$$v - v_0 = \frac{B^2 l^2}{mR\alpha} v_0 \left[e^{-\alpha t} \right]_0^t$$

$$v(t) = v_0 + \frac{B^2 l^2}{mR\alpha} v_0 \left(e^{-\alpha t} - 1\right)$$
$$v(t) = v_0 \left[1 + \frac{B^2 l^2}{mR\alpha} \left(e^{-\alpha t} - 1\right)\right]$$

Come si vede dalla precedente espressione, per t=0sec la velocità è pari alla valocità iniziale v_0 del problema. Per $t \to \infty$ si ha invece che $e^{-\alpha t}=0$ e, sostituendo il parametro α trovato al punto 1), si ottiene la velocità limite per $t \to \infty$, v_∞:

$$v_\infty = v_0 \left[1 - \frac{B^2 l^2}{mR\alpha}\right]$$
$$v_\infty = v_0 \left[1 - \frac{B^2 l^2}{m/C + B^2 l^2}\right] = v_0 \left[1 - \frac{CB^2 l^2}{m + CB^2 l^2}\right]$$
$$v_\infty = \frac{mv_0}{m + CB^2 l^2}$$

Punto 3): La corrente $I(t)$ che circola nel circuito produce un accumulo di carica $Q(t)$ sul condensatore C. Per trovare tutta la carica accumulata per $t \to \infty$ si può integrare l'espressione di $I(t)=dQ/dt$, trovata al punto 1), fra l'istante t=0sec e ∞. Alternativamente si può invece ragionare come segue: dato che per $t \to \infty$ la corrente $I(t)$ diventa zero (punto 1), ne cosegue che per $t \to \infty$ le forze elettromotrici che agiscono sulla maglia (forza elettromotrice indotta, f_{ind}, e d.d.p. ai capi del condensatore, $\Delta V_C = Q/C$) saranno uguali ed opposte. Per calcolare la carica accumulata sul condensatore, Q_∞, possiamo allora uguagliare i moduli di f_{ind} e ΔV_C:

$$\begin{cases} f_{ind} = Blv_\infty \\ \Delta V_C = \dfrac{Q_\infty}{C} \end{cases}$$
$$\begin{cases} f_{ind} = \dfrac{mBlv_0}{m + CB^2 l^2} \\ \Delta V_C = \dfrac{Q_\infty}{C} \end{cases}$$
$$Q_\infty = \frac{mCBlv_0}{m + CB^2 l^2}$$

Punto 4): E' possibile determinare l'energia dissipata per effetto Joule fra t=0sec e $t \to \infty$ considerando che inizialmente (t=0sec) c'è solo energia cinetica della barretta in moto con velocità v_0 (mentre non ci sono altre forme di energia); alla fine invece ($t \to \infty$) c'è energia cinetica della barretta (che ha velocità v_∞ determinata al punto 2) e energia elettrostatica accumulata nel condensatore C che ha carica Q_∞. Allora l'energia iniziale U_i è pari a:

$$U_i = \frac{1}{2} m v_0^2$$

mentre l'energia finale U_∞ è data da:

$$U_\infty = \frac{1}{2} m v_\infty^2 + \frac{1}{2} \frac{Q_\infty^2}{C}$$

$$U_\infty = \frac{1}{2} m \left(\frac{m v_0}{m + CB^2 l^2} \right)^2 + \frac{1}{2C} \left(\frac{mCBlv_0}{m + CB^2 l^2} \right)^2$$

$$U_\infty = \frac{1}{2} \left(\frac{m v_0}{m + CB^2 l^2} \right)^2 \left[m + \frac{1}{C} (CBl)^2 \right]$$

$$U_\infty = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{m}{\left(m + CB^2 l^2 \right)^2} \left[m + CB^2 l^2 \right]$$

$$U_\infty = \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{m}{m + CB^2 l^2}$$

L'energia dissipata per effetto Joule è pari all'energia persa fra t=0sec e $t \rightarrow \infty$; calcolando allora la differenza $U_i - U_\infty$ otteniamo l'energia U_J dissipata per effetto Joule:

$$U_J = U_i - U_\infty$$

$$U_J = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \frac{m}{m + CB^2 l^2}$$

$$U_J = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{m}{m + CB^2 l^2} \right)$$

$$U_J = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{CB^2 l^2}{m + CB^2 l^2} \right)$$