Risultati esame scritto Fisica 1 - 01/09/2015
orali: 17-09-2015 alle ore 09.30 presso aula M

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

Nuovo ordinamento

matricola	voto	
120980	nc	
114907	13	
112119	21	ammesso
120819	nc	
118481	11	
114683	nc	
114872	nc	
114931	19	ammesso
118471	17	ammesso
118522	nc	
118937	nc	

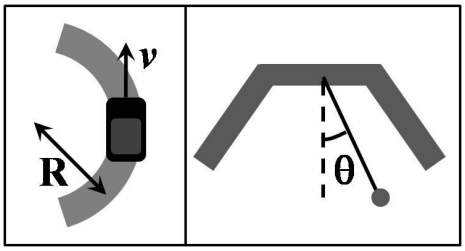
nc=non classificato

Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica ï 01/09/2015

Problema 1

Un'auto percorre una curva di raggio R con velocità v di modulo costante. Determinare il coefficiente di attrito statico minimo, μ, affinché l'auto non sbandi. All'interno dell'auto si trova un pendolo, costituito da una pallina e da una fune inestensibile di massa trascurabile, appeso al tettuccio dell'auto. Mentre l'auto percorre la curva a velocità costante, il pendolo si sposta dalla direzione verticale. Determinare l'angolo θ che il pendolo forma con la direzione verticale (vedi figura).



[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri R e v, e dell'accelerazione di gravità g]

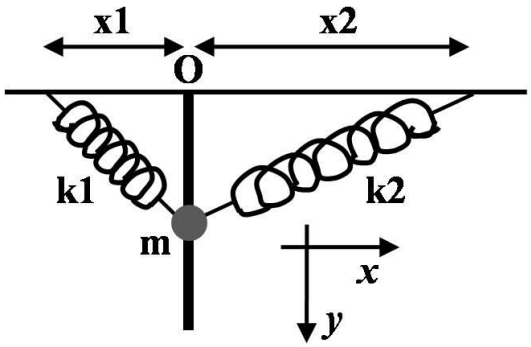
Problema 2

Sia dato un corpo puntiforme di massa m=5.0kg vincolato a muoversi senza attrito lungo un'asta verticale appesa al soffitto (vedi figura). Due molle, entrambe di massa trascurabile e lunghezza a riposo nulla, sono legate per un'estremità al soffitto e per l'altra estremità al corpo di massa m. La prima molla si trova a sinistra della massa m, ha costante elastica k_1=1.0·10^{2}N/m ed è legata al soffitto ad una distanza x_1=1.0m a sinistra dell'asta; la seconda molla si trova a destra della massa m, ha costante elastica k_2=2.0·10^{2}N/m ed è legata al soffitto ad una distanza x_2=2.0m a destra dell'asta (vedi figura).

1) Calcolare la posizione di equilibrio della massa m e la reazione vincolare, F_N, esercitata dall'asta sulla massa m.

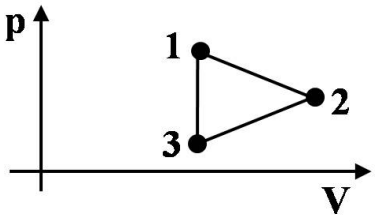
2) Al corpo m, che si trova in quiete nella posizione determinata al punto 1), viene aggiunta un'altra massa pari a m, e la massa totale è ora pari a 2m; calcolare la nuova posizione di equilibrio e dimostrare che il corpo si muoverà con un moto armonico.

3) Calcolare il tempo che il corpo di massa 2m impiega a raggiungere la nuova posizione di equilibrio e con quale velocità arriva in tale posizione.



Problema 3

Un gas ideale monoatomico compie il ciclo di trasformazioni reversibili (vedi figura) costituito da un triangolo isoscele nel piano p,V (pressione-Volume). La base del triangolo isoscele è costituito dalla trasformazione finale del ciclo, che va dallo stato 3 allo stato 1 mediante una trasformazione isocora (volume costante); la prima trasformazione dallo stato 1 allo stato 2 costituisce uno dei lati obliqui del triangolo, e la successiva dallo stato 2 allo stato 3 costituisce l'altro lato obliquo. Lo stato 1 e lo stato 2 hanno la stessa temperatura, T_1=T_2, anche se la trasformazione che va dallo stato 1 allo stato 2 NON è una isoterma; la temperatura dello stato 3 è invece inferiore, T_3<T_1. Determinare il rendimento η del ciclo, sapendo che V_2=(3/2)·V_1, dove V_2 è il volume dello stato 2 e V_1 quello dello stato 1.



[Poiché il ciclo è costituito dal triangolo isoscele in figura, si ha che p_2=(p_1+p_3)/2]

Soluzione problema 1

Affinché l'auto possa percorrere la curva compiendo un arco di moto circolare uniforme senza sbandare, è necessario che la forza di attrito, F_A, fra le ruote e la strada sia sufficiente a garantire la forza centripeta, F_{CP}:

$$F_{CP} = Ma_{CP} = M\frac{v^2}{R}$$

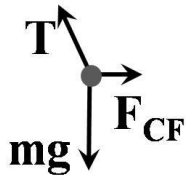
$$F_A = \mu Mg$$

dove M è la massa dell'auto e a_{CP} è l'accelerazione centripeta. Il coefficiente di attrito minimo affiché l'auto non sbandi si ha per $F_A = F_{CP}$:

$$\mu Mg = M\frac{v^2}{R}$$

$$\mu = \frac{v^2}{Rg}$$

Durante la curva, all'interno dell'auto il pendolo si scosta dalla direzione verticale ed è in equilibrio con un certo angolo θ. Nel sistema di riferimento dell'auto, che non è un sistema inerziale dato che è sottoposto ad accelerazione centripeta, esiste la forza apparente data dalla forza centrifuga, F_{CF}, caratterizzata da accelerazione uguale in modulo e opposta in verso a quella centripeta. Si ha allora che:



$$F_{CF} = m\frac{v^2}{R}$$

quest'ultima diretta orizzontalmente verso l'esterno della curva (m è la massa del pendolo).

Nel sistema di riferimento solidale con l'auto, il pendolo è sottoposto alla forza centrifuga F_{CF} (forza apparente), alla forza peso $P=mg$ diretta verticalmente verso il basso, e alla tensione T della fune del pendolo (diretta lungo l'angolo θ). La forza centripeta agente sul pendolo è data dalla componente orizzontale della tensione T.

Durante la curva il pendolo è in equilibrio nel sistema di riferimento solidale con l'auto, e di conseguenza la risultante di F_{CF}, P e T deve essere nulla. Scomponendo il II principio della dinamica lungo gli assi orizzontale e verticale, si ha allora che:

$$\begin{cases} T\sin\theta = F_{CF} \\ T\cos\theta = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} T\sin\theta = mv^2/R \\ T\cos\theta = mg \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro si ha che:

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Prendiamo come sistema di riferimento gli assi x,y rappresentati nella figura (asse x diretto verso destra e asse y diretto verso il basso), avente come origine il punto "0" coincidente con l'estremità dell'asta sul soffitto (vedi figura). Le forze agenti sulla massa m sono la forza peso mg (verticale verso il basso), le forze elastiche delle molle 1 e 2 dirette rispettivamente lungo la direzione della molla 1 e della molla 2, la reazione vincolare F_N (orizzontale) dell'asta sul corpo m (la reazione vincolare non ha componente lungo l'asse verticale perché il corpo si muove senza attrito lungo l'asta).

Per quanto riguarda la forza elastica $\mathbf{F_{el}}$, la legge di Hooke in forma vettoriale si scrive come:

$$\mathbf{F_{el}} = -k\mathbf{r}$$

dove **r** è il vettore deformazione della molla (ed è diretto lungo l'asse della molla). Scomponendo la forza elastica lungo gli assi *x* e *y* si ottiene che:

$$\left(F_{el,x}, F_{el,y}\right) = -k\left(x, y\right)$$

$$\begin{cases} F_{el,x} = -kx \\ F_{el,y} = -ky \end{cases}$$

Questa scomposizione lungo gli assi vale per entrambe le molle del problema, sostituendo alla costante elastica k le costanti k_1 e k_2 del problema e le rispettive coordinate. Scomponendo tutte le forze lungo gli assi, il II principio della dinamica si scrive come segue:

$$\begin{cases} ma_x = k_2 x_2 - k_1 x_1 + F_N \\ ma_y = mg - k_2 y - k_1 y \end{cases}$$

Nella precedente espressione k_2x_2 ha segno positivo perché la molla 2 tira il corpo verso destra (asse positivo delle x), mentre k_1x_1 ha segno negativo perchè tira il corpo nel verso opposto.

Per trovare la posizione di equilibrio e la reazione vincolare F_N imponiamo che a_x=0=a_y:

$$\begin{cases} F_N = k_1 x_1 - k_2 x_2 \approx -300\text{N} \\ y_0 = \dfrac{mg}{k_2 + k_1} \approx 0.16\text{m} \end{cases}$$

La coordinata x della posizione di equilibrio è x=0m, dato che il corpo si può muovere solo lungo l'asta.

Punto 2): Aggiungendo un'altra massa pari a m, la forza peso aumenta e il corpo non è più in equilibrio nella posizione y_0 determinata al punto 1). Lungo l'asse x rimane tutto invariato (e la reazione vincolare F_N è la stessa determinata precedentemente); lungo l'asse y il II principio della dinamica è dato da:

$$2ma_y = 2mg - k_2 y - k_1 y$$

Nell'ultima equazione è stato considerato che la massa è ora 2m.
Imponendo che la risultante delle forze sia nulla, ovvero che a_y=0, si trova la nuova posizione di equilibrio y_{eq}:

$$\left(k_2 + k_1\right) y_{eq} = 2mg$$

$$y_{eq} = \frac{2mg}{k_2 + k_1} \approx 0.32\text{m}$$

Per dimostrare che si tratta di un moto armonico, riconsideriamo l'equazione del II principio della dinamica scritta precedentemente:

$$2ma_y = 2mg - k_2 y - k_1 y$$

$$2m\frac{d^2 y}{dt^2} = 2mg - \left(k_2 + k_1\right) y$$

$$\frac{2m}{k_2 + k_1}\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{2mg}{k_2 + k_1} - y$$

$$\frac{2m}{k_2 + k_1}\frac{d^2 y}{dt^2} = y_{eq} - y$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto della nuova posizione di equilibrio, $y_{eq}=2mg/(k_2+k_1)$ appena determinata. Riarrangiando si ottiene che:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k_2+k_1}{2m}\left(y-y_{eq}\right)=0$$

Questa equazione differenziale del II ordine è la tipica equazione di un moto armonico lungo l'asse y che descrive l'oscillazione del corpo di massa $2m$ intorno alla posizione di equilibrio y_{eq}. Il moto avviene con pulsazione ω data da:

$$\omega=\sqrt{\frac{k_2+k_1}{2m}}\approx 5.48\text{Hz}$$

Punto 3): Data la pulsazione ω calcolata al punto 2), ne segue che il periodo T del moto armonico è dato da:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k_2+k_1}}\approx 1.15\text{sec}$$

In un moto armonico, il tempo t impiegato ad arrivare nella posizione di equilibrio a partire da un estremo del moto è pari a 1/4 del periodo T; ne consegue che il tempo t richiesto dal problema è dato da:

$$t=\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{k_2+k_1}}\approx 0.29\text{sec}$$

Per calcolare la velocità con cui il corpo di massa $2m$ arriva nel nuovo punto di equilibrio, y_{eq}, applichiamo la conservazione dell'energia in assenza di forze dissipative. Nel punto iniziale, data dalla coordinata y_0, l'energia totale è costituita solo dall'energia potenziale elastica delle due molle e dall'energia potenziale legata all'altezza del corpo $2m$; non c'è energia cinetica perché il corpo parte dallo stato di quiete:

$$E_0=\frac{1}{2}k_1\left(x_1^2+y_0^2\right)+\frac{1}{2}k_2\left(x_2^2+y_0^2\right)-2mgy_0$$

Il corpo arriva nel nuovo punto di equilibrio, y_{eq}, con velocità diversa da zero; oltre all'energia potenziale si ha ora anche energia cinetica:

$$E_{fin}=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}k_1\left(x_1^2+y_{eq}^2\right)+\frac{1}{2}k_2\left(x_2^2+y_{eq}^2\right)-2mgy_{eq}$$

Uguagliando l'energia iniziale e finale si ottiene un'equazione per la velocità v:

$$E_0=E_{fin}$$

$$\frac{1}{2}k_1\left(x_1^2+y_0^2\right)+\frac{1}{2}k_2\left(x_2^2+y_0^2\right)-2mgy_0=$$

$$=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}k_1\left(x_1^2+y_{eq}^2\right)+\frac{1}{2}k_2\left(x_2^2+y_{eq}^2\right)-2mgy_{eq}$$

$$\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_1y_0^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}k_2y_0^2-2mgy_0=$$

$$=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_1y_{eq}^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}k_2y_{eq}^2-2mgy_{eq}$$

$$\frac{1}{2}(k_1+k_2)y_0^2-2mgy_0=\frac{1}{2}2mv^2+\frac{1}{2}(k_1+k_2)y_{eq}^2-2mgy_{eq}$$

$$\frac{1}{2}2mv^2=\frac{1}{2}(k_1+k_2)(y_0^2-y_{eq}^2)+2mg(y_{eq}-y_0)$$

$$v^2=\left(\frac{k_1+k_2}{2m}\right)(y_0^2-y_{eq}^2)+2g(y_{eq}-y_0)$$

$$v^2=\omega^2(y_0^2-y_{eq}^2)+2g(y_{eq}-y_0)$$

$$v=\sqrt{\omega^2(y_0^2-y_{eq}^2)+2g(y_{eq}-y_0)}\approx 0.91\text{m/s}$$

Soluzione problema 3

Calcoliamo il rendimento η del ciclo con la seguente espressione:

$$\eta=\frac{W_{TOT}}{Q_{ASS}}$$

dove W_{TOT} e Q_{ASS} sono rispettivamente il lavoro svolto e il calore assorbito durante il ciclo.

Il lavoro W_{TOT} è pari all'area racchiusa dal ciclo nel piano p,V; dato che si tratta di un triangolo isoscele l'area è data da:

$$W_{TOT}=\frac{1}{2}(p_1-p_3)(V_2-V_1)$$

$$W_{TOT}=\frac{1}{2}(p_1-p_3)\frac{1}{2}V_1=\frac{1}{4}(p_1-p_3)V_1$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $V_2=(3/2)\cdot V_1$; considerando inoltre che $V_1=V_3$ si ha che:

$$W_{TOT}=\frac{1}{4}(p_1-p_3)V_1=\frac{1}{4}p_1V_1-\frac{1}{4}p_3V_3$$

$$W_{TOT}=\frac{1}{4}nRT_1-\frac{1}{4}nRT_3=\frac{1}{4}nR(T_1-T_3)$$

Nei precedenti passaggi è stata usata l'equazione di stato dei gas perfetti, $pV=nRT$.

Per calcolare il calore Q_{12} scambiato con l'esterno nella prima trasformazone dallo stato 1 allo stato 2, applichiamo il I principio della termodinamica; detto W_{12} il lavoro svolto durante la trasformazione da 1 a 2 si ha che:

$$\Delta U_{12}=Q_{12}-W_{12}$$

$$Q_{12}=\Delta U_{12}+W_{12}=0+W_{12}$$

$$Q_{12}=W_{12}$$

dove $\Delta U_{12}=0$ perché $T_1=T_2$. Il lavoro W_{12} svolto durante la trasformazione da 1 a 2 è data dall'area sottesa dal segmento 1-2 nel piano (p,V), ovvero del trapezio rettangolo avente come basi p_1 e p_2:

$$W_{12}=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_2-V_1)=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\frac{1}{2}V_1$$

$$W_{12}=\frac{1}{4}(p_1V_1+p_2V_1)=\frac{1}{4}\left(p_1V_1+\frac{2}{3}p_2V_2\right)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la relazione $V_1=(2/3)\cdot V_2$. Usando l'equazione dei gas perfetti si ha che:

$$W_{12} = \frac{1}{4}\left(p_1 V_1 + \frac{2}{3} p_2 V_2 \right)$$

$$W_{12} = \frac{1}{4} nRT_1 + \frac{1}{6} nRT_2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) nRT_1$$

$$W_{12} = \frac{5}{12} nRT_1$$

Nei precedenti passaggi è stata usata la relazione $T_1=T_2$. Quindi si ha per il calore Q_{12}:

$$Q_{12} = W_{12} = \frac{5}{12} nRT_1$$

Poiché $Q_{12} > 0$, questa quantità di calore è assorbita dall'esterno.

Il calore scambiato durante la seconda trasformazione da 2 a 3 è calore ceduto; infatti applicando alla trasformazione 2-3 il I principio della termodinamica si ha che:

$$\Delta U_{23} = Q_{23} - W_{23}$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + W_{23} < 0$$

ΔU_{23} è <0 perché $T_3<T_2$; inoltre W_{23} è <0 perché l'area sottesa dal segmento 2-3 è percorsa da destra verso sinistra nel piano p,V durante la trasformazione 2-3, e va quindi considerata col segno "-". Ne consegue quindi che $Q_{23} < 0$ e si tratta di calore ceduto.

Infine il calore Q_{31} scambiato durante l'ultima trasformazione del ciclo è dato da (trasf. isocora):

$$Q_{31} = C_V \left(T_1 - T_3 \right)$$

$$Q_{31} = \frac{3}{2} nR\left(T_1 - T_3 \right)$$

Dato che $T_1>T_3$, il calore Q_{31} scambiato con l'esterno è >0 ed è quindi calore assorbito.

Riassumendo i risultati finora trovati e sostituendo nella formula per il rendimento, si ottiene che:

$$\eta = \frac{W_{TOT}}{Q_{ASS}} = \frac{W_{TOT}}{Q_{31} + Q_{12}}$$

$$\eta = \frac{\frac{1}{4} nR\left(T_1 - T_3 \right)}{\frac{3}{2} nR\left(T_1 - T_3 \right) + \frac{5}{12} nRT_1} = \frac{\left(T_1 - T_3 \right)}{6\left(T_1 - T_3 \right) + \frac{5}{3} T_1}$$

$$\eta = \frac{1}{6 + \frac{5}{3} \frac{T_1}{T_1 - T_3}} = \frac{1}{6 + \frac{5}{3\left(1 - T_3 / T_1 \right)}}$$

Dato che gli stati 1 e 3 sono legati da una trasformazione isocora, vale la seguente relazione fra pressione p e temperatura T:

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{T_3}{T_1}$$

per cui il rendimento in funzione della pressione è dato da:

$$\eta = \frac{1}{6 + \frac{5}{3(1 - p_3/p_1)}}$$

Per trovare il rapporto p_3/p_1 abbiamo le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(p_1 + p_3) = p_2 \\ p_1 V_1 = p_2 V_2 \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1}{V_2} \end{cases}$$

La prima espressione è una conseguenza del fatto che il ciclo costituisce un triangolo isoscele nel piano p,V mentre la seconda espressione rappresenta la legge di Boyle valida per stati che hanno la stessa temperatura. Usando la relazione $V_2=(3/2)\cdot V_1$ si ha che:

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3) \\ \frac{p_2}{p_1} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3) \\ \frac{p_1 + p_3}{p_1} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_3) \\ 1 + \frac{p_3}{p_1} = \frac{4}{3} \rightarrow \frac{p_3}{p_1} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Sostituendo nell'ultima espressione trovata per il rendimento η, si ottiene che:

$$\eta = \frac{1}{6 + \frac{5}{3(1 - 1/3)}} = \frac{2}{17} \approx 0.12$$