Risultati esame scritto Fisica 1 - 01/02/2016

orali: 11-02-2016 alle ore 14.00 presso aula G

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
115293*	14	
112852	17	ammesso
118470	21	ammesso
114952	nc	
114896	19	ammesso
114683	14	
114930*	15	
114872	nc	
112878*	nc	
114899	14	
114889*	22	ammesso
114902	11	
115616*	15	
112082*	13	
114870*	11	
112102*	nc	
112110	22	ammesso
120980	nc	
118503	22	ammesso
207506	17	ammesso
209479	18	ammesso
207542	nc	
207315	nc	
207285	11	
207396	nc	
207428*	nc	
118632*	13	
207306	nc	
207822	22	ammesso
207683	10	
207462	11	
207559*	10	
119844	11	
207718	10	
118522*	17	ammesso
207795	13	
207754	24	ammesso
208490	26	ammesso
118592	nc	
118937	nc	
207478	nc	
207375*	10	

120032	19	ammesso
118529	18	ammesso

nc=non classificato

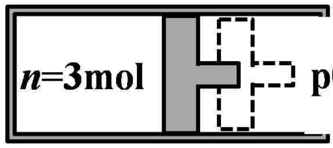
Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 01/02/2016

Problema 1

Sia dato un serbatoio cilindrico chiuso da un pistone che si muove senza attrito lungo le pareti del serbatoio (vedi figura). Sia le pareti del cilindro che il pistone sono di materiale isolante. All'interno del serbatoio sono racchiuse n=3.0mol di gas ideale biatomico alla temperatura iniziale T_1=300K. Un cubetto di Cu (rame) di volume trascurabile, massa m_{CU}=0.1kg e temperatura iniziale pari a T_2=900K viene immerso nel gas. Sapendo che il calore specifico di Cu è pari a c_{CU}=387J/kg·K e che all'esterno del recipiente si ha pressione costante pari alla pressione atmosferica p_0, si determini la temperatura finale T_0 del gas.

[Costante dei gas perfetti R=8.31J/K·mol]

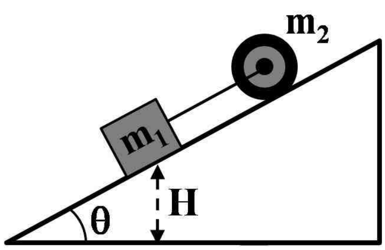


Problema 2

Sia dato un piano inclinato che forma un angolo θ=30° col piano orizzontale. Sul piano inclinato si trovano un corpo di massa m_1=15.0kg, e un disco omogeneo di massa m_2=10.0kg e raggio R=0.1m; i centri di massa dei due corpi sono legati mediante una fune inestensibile e di massa trascurabile, inizialmente tesa (vedi figura). Il corpo m_1 si trova inizialmente ad una quota H=1.0m dal suolo. Fra il piano inclinato e i due corpi vi è attrito con lo stesso coefficiente di attrito μ (si assumano uguali coefficienti di attrito statico e dinamico). Sapendo che il momento di inerzia di un disco omogeneo di massa m_2 per rotazione intorno al proprio centro di massa è pari a $I=(1/2)m_2R^2$, si determini:

1) il minimo valore di μ affinché il moto del disco sia di puro rotolamento;

2) la velocità con cui il corpo m_1 arriva alla fine del piano inclinato, supponendo che il sistema sia inizialmente in quiete e che μ abbia il valore minimo determinato al punto 1).



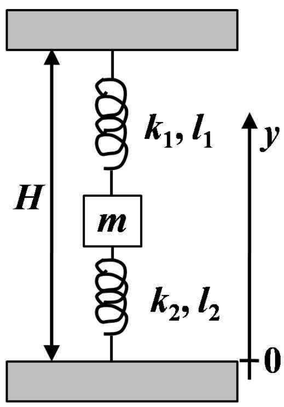
Problema 3

Sia data una stanza di altezza H=3.00m in cui un corpo di massa m=10.0kg si trova sospeso fra soffitto e pavimento mediante due molle di massa trascurabile, come mostrato in figura. La prima molla, che ha un'estremità vincolata al soffitto e l'altra estremità legata al corpo m, ha costante elastica $k_1=2.5\cdot10^3$N/m e lunghezza a riposo l_1=0.50m. La seconda molla, che ha un'estremità vincolata al pavimento e l'altra estremità legata al corpo m, ha costante elastica $k_2=5.0\cdot10^3$N/m e lunghezza a riposo l_2=0.25m. Tutto il sistema è allineato lungo un asse verticale che va dal pavimento al soffitto, ed è soggetto all'accelerazione di gravità g=9.81m/s^2.

1) Si determini a che distanza y_0 dal pavimento il corpo m è in equilibrio.

2) Il corpo m viene spostato verticalmente e posto in quiete ad una distanza y_1=1.50m dal pavimento, quindi viene rilasciato. Si dimostri che, in assenza di qualsiasi forma di attrito o dissipazione, il moto che segue è di tipo armonico, se ne determini la pulsazione ω e la legge oraria $y=y(t)$ sapendo che $y=y_1$ per t=0sec.

3) Supponendo che vi sia attrito con l'aria circostante, si determini l'energia dissipata dall'attrito nello spostamento del corpo m da y_1 a y_0, sapendo che esso arriva nel punto y_0 con velocità di modulo pari a v_A=10.0m/s.



Soluzione problema 1

Dato che il gas e il cubetto di Cu sono a temperature diverse, ci sarà scambio di calore fra queste due entità fino a che non si raggiunge un nuovo equilibrio termico a temperatura T_0, con T_0 temperatura finale del gas e del cubetto. Inoltre, dato che la pressione esterna è costantemente pari alla pressione atmosferica p_0 e che il pistone si muove liberamente, si ha una condizione isobara per il gas all'interno del recipiente. Quindi tutto il calore ceduto dal cubetto al gas produce un aumento di temperatura del gas seguendo una trasformazione isobara. Possiamo allora scrivere che il calore assorbito dal gas è pari a:

$$\Delta Q_{gas} = C_p \left(T_0 - T_1\right)$$

$$\Delta Q_{gas} = \frac{7}{2} nR\left(T_0 - T_1\right)$$

mentre per il calore ceduto dal cubetto di Cu si ha che:

$$\Delta Q_{CU} = m_{CU} c_{CU} \left(T_0 - T_2\right)$$

Siccome lo scambio di calore con l'esterno è pari a zero (pareti adiabatiche), si ha che tutto il calore assorbito dal gas è pari a tutto il calore ceduto dal cubetto, e quindi:

$$\Delta Q_{TOT} = \Delta Q_{CU} + \Delta Q_{gas} = 0$$

$$\frac{7}{2} nR\left(T_0 - T_1\right) + m_{CU} c_{CU} \left(T_0 - T_2\right) = 0$$

$$\left(\frac{7}{2} nR + m_{CU} c_{CU}\right) T_0 = \frac{7}{2} nRT_1 + m_{CU} c_{CU} T_2$$

$$T_0 = \frac{7/2\, nRT_1 + m_{CU} c_{CU} T_2}{7/2\, nR + m_{CU} c_{CU}} \approx 484\text{K}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Poiché la fune è inestensibile, i due corpi si muovo in maniera solidale con un'unica accelerazione a e stessa velocità v, dove prendiamo l'asse positivo del moto diretto verticalmente verso il basso. Con questa scelta il II principio della dinamica per m_1 si scrive come segue:

$$m_1 a = m_1 g \sin\theta - T - \mu m_1 g \cos\theta$$

$$T = m_1 g \sin\theta - m_1 a - \mu m_1 g \cos\theta$$

dove nella seconda espressione abbiamo ricavato la tensione T della fune.

Per il corpo m_2 si ha invece la seguente espressione per il II principio della dinamica, supponendo che agisca su m_2 la forza di attrito statitco F_A (si ha puro rotolamento solo con attrito statico, ma F_A deve essere minore o uguale dell'attrito statico massimo, $\mu m_2 g\cos\theta$):

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta + T - F_A$$

$$m_2 a = m_2 g \sin\theta + m_1 g \sin\theta - m_1 a - \mu m_1 g \cos\theta - F_A$$

$$\left(m_1 + m_2\right) a = \left(m_1 + m_2\right) g \sin\theta - \mu m_1 g \cos\theta - F_A$$

dove abbiamo sostituito alla tensione T l'espressione trovata sopra.

Affinché il moto sia di puro rotolamento, all'ultima espressione trovata (che esprime il II principio della dinamica per il sistema dei due corpi m_1 e m_2, e quindi tiene conto della parte traslazionale del moto) dobbiamo aggiungere le equazioni del moto rotatorio del disco:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)a=(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta-F_A\\ I\alpha=RF_A\\ a=R\alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2)a=(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta-F_A\\ I\alpha=RF_A\\ a=R\alpha\rightarrow\alpha=a/R\end{cases}$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2)a=(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta-F_A\\ I\dfrac{a}{R}=RF_A\rightarrow a=\dfrac{R^2F_A}{I}\\ \alpha=a/R\end{cases}$$

$$\begin{cases}(m_1+m_2)\dfrac{R^2F_A}{I}=(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta-F_A\\ a=\dfrac{R^2F_A}{I}\\ \alpha=\dfrac{a}{R}\end{cases}$$

Riarrangiando la prima equazione del sistema si ottiene l'espressione della forza di attrito F_A:

$$F_A\left[1+\frac{(m_1+m_2)R^2}{I}\right]=(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta$$

$$F_A=[(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta]\left[\frac{I}{I+(m_1+m_2)R^2}\right]$$

$$F_A=[(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta]\left[\frac{1/2\,m_2R^2}{1/2\,m_2R^2+(m_1+m_2)R^2}\right]$$

$$F_A=[(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta]\left(\frac{m_2}{3m_2+2m_1}\right)$$

dove è stata usata l'espressione $I=(1/2)m_2R^2$.

La formula trovata ci dice quanto deve valere la forza di attrito statico, F_A, affinché si abbia un moto di puro rotolamento. Ma la forza di attrito statico è sempre minore o uguale dell'attrito massimo dato da:

$$F_{A,MAX}=\mu N$$

$$F_{A,MAX}=\mu m_2 g\cos\theta$$

dove N è la reazione vincolare normale del piano inclinato sul disco, che nel nostro caso è pari alla componente perpendicolare della forza peso di m_2. Imponendo che $F_A\leq F_{A,MAX}$, si ottiene il minimo valore di μ necessario al puro rotolamento:

$$F_A \le F_{A,MAX}$$

$$\left[(m_1+m_2)g\sin\theta-\mu m_1 g\cos\theta\right]\left(\frac{m_2}{3m_2+2m_1}\right)\le \mu m_2 g\cos\theta$$

$$\left[(m_1+m_2)\sin\theta-\mu m_1\cos\theta\right]\left(\frac{1}{3m_2+2m_1}\right)\le \mu\cos\theta$$

$$\mu\cos\theta+\mu m_1\cos\theta\left(\frac{1}{3m_2+2m_1}\right)\ge\left[(m_1+m_2)\sin\theta\right]\left(\frac{1}{3m_2+2m_1}\right)$$

$$\mu\cos\theta\left[1+\frac{m_1}{3m_2+2m_1}\right]\ge\left[(m_1+m_2)\sin\theta\right]\left(\frac{1}{3m_2+2m_1}\right)$$

$$\mu\cos\theta\left(\frac{3m_2+3m_1}{3m_2+2m_1}\right)\ge\left[(m_1+m_2)\sin\theta\right]\left(\frac{1}{3m_2+2m_1}\right)$$

$$\mu\cos\theta(3m_2+3m_1)\ge(m_1+m_2)\sin\theta$$

$$\mu\ge\frac{(m_1+m_2)\sin\theta}{3(m_2+m_1)\cos\theta}=\frac{\tan\theta}{3}\approx 0.19$$

Punto 2): Per determinare la velocità v con cui m_1 urta il suolo orizzontale applichiamo ragioniamo sull'energia, ricordando che in un moto di puro rotolamento l'attrito NON dissipa energia (quindi per il corpo m_2 non c'è dissipazione). Dato che il sistema è inizialmente in quiete, si ha solo energia potenziale U_i legata alla quota di m_1 e m_2:

$$U_i=m_1 gH+m_2 g y_{2i}$$

dove abbiamo indicato con y_{2i} la quota iniziale di m_2.

Quando il corpo m_1 giunge al suolo, si ha energia cinetica legata alla velocità traslazionale di m_1, e alle velocità traslazionale e rotazionale di m_2. Poiché m_1 e m_2 si muovono in maniera solidale, le loro velocità traslazionali sono uguali: $v_1=v_2=v$. Inoltre siccome si ha un moto di puro rotolamento la velocità angolare ω del disco e la sua velocità traslazionale v sono legate dalla relazione: $v=R\omega$. La somma della tre energie cinetiche è data da:

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m_2R^2\right)\frac{v^2}{R^2}$$

$$K=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2+\frac{1}{4}m_2v^2$$

$$K=\frac{1}{4}(2m_1+3m_2)v^2$$

Ma alla fine del moto abbiamo ancora energia potenziale legata alla quota finale di m_2. Infatti, mentre m_1 è arrivato al suolo e la sua energia potenziale è nulla, m_2 è sceso di una quota pari a H alla quota finale $y_{2f}=y_{2i}-H$. Pertanto l'energia potenziale finale è U_f:

$$U_f=0+m_2 g y_{2f}$$

$$U_f=m_2 g(y_{2i}-H)$$

Dobbiamo però considerare che il corpo m_1 dissipa energia lungo il piano inclinato a causa dell'attrito. La distanza percorsa lungo il piano inclinato è pari a d:

$$d = \frac{H}{\sin\theta}$$

da cui segue che l'energia dissipata per attrito, E_A, da m_1 è pari a:

$$E_A = \mu m_1 g \cos\theta \cdot d$$

$$E_A = \mu m_1 g \cos\theta \cdot \frac{H}{\sin\theta} = \mu m_1 gH \frac{1}{\tan\theta}$$

$$E_A = \frac{\tan\theta}{3} m_1 gH \frac{1}{\tan\theta} = \frac{m_1 gH}{3}$$

dove si è usato il valore di μ determinato al punto 1).

Combinando tutti i termini energetici possiamo scrivere che l'energia iniziale (tutta potenziale) deve essere uguale all'energia finale (cinetica e potenziale) più l'energia dissipata dalla forza di attrito:

$$U_i = K + U_f + E_A$$

$$m_1 gH + m_2 g y_{2i} = \frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v^2 + m_2 g(y_{2i} - H) + \frac{m_1 gH}{3}$$

$$(m_1 + m_2)gH = \frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v^2 + \frac{m_1 gH}{3}$$

$$\left(m_1 + m_2 - \frac{m_1}{3}\right)gH = \frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v^2$$

$$\frac{1}{4}(2m_1 + 3m_2)v^2 = \left(\frac{2m_1 + 3m_2}{3}\right)gH$$

$$v^2 = \frac{4}{3} gH$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gH} \approx 3.6\text{m/s}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Assumendo l'asse y diretto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pavimento, come rappresentato nella figura del problema, si ha che $y=l_2$ è la coordinata che corrisponde alla posizione di riposo della molla 2, mentre $y=H-l_1$ è la coordinata che corrisponde alla posizione a riposo della molla 1. Con tali premesse, il II principio della dinamica si scrive come segue:

$$ma_y = -mg - k_2(y - l_2) - k_1(y - (H - l_1))$$

Imponendo a_y=0 si trova la posizione di equilibrio y_0:

$$-mg - k_2(y_0 - l_2) - k_1(y_0 - (H - l_1)) = 0$$

$$-mg - k_2 y_0 + k_2 l_2 - k_1 y_0 + k_1(H - l_1) = 0$$

$$(k_2+k_1)y_0 = k_2 l_2 + k_1(H-l_1) - mg$$
$$y_0 = \frac{k_2 l_2 + k_1(H-l_1) - mg}{(k_2+k_1)} \approx 0.99\text{m}$$

Punto 2): Il moto avviene tutto lungo l'asse y perché lo spostamento dalla posizione di equilibrio è effettuato lungo l'asse verticale e non si hanno quindi forze orizzontali. Per dimostrare che si tratta di un moto armonico ripartiamo dal II principio della dinamica scritto per il punto 1):

$$ma_y = -mg - k_2(y-l_2) - k_1(y-(H-l_1))$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k_2 y + k_2 l_2 - k_1 y + k_1(H-l_1)$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(k_1+k_2)y - mg + k_2 l_2 + k_1(H-l_1)$$

Confrontando l'ultima espressione col risultato trovato per y_0, si vede che l'ultima parte del membro a destra si può scrivere come:

$$-mg + k_2 l_2 + k_1(H-l_1) = (k_1+k_2)y_0$$

da cui segue che l'equazione differenziale del moto è data da:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(k_1+k_2)y + (k_1+k_2)y_0$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(k_1+k_2)(y-y_0)$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + (k_1+k_2)(y-y_0) = 0$$
$$m\frac{d^2(y-y_0)}{dt^2} + (k_1+k_2)(y-y_0) = 0$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttatto il fatto che la derivata seconda di un termine costante è pari a zero: $d^2y_0/dt^2=0$.
Riarrangiando l'ultima espressione si arriva all'equazione differenziale caratteristica di un moto armonico per la grandezza (y-y_0):

$$\frac{d^2(y-y_0)}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m}(y-y_0) = 0$$

da cui segue che il corpo m oscilla intorno alla posizione di equilibrio y_0 con moto di tipo armonico.

La pulsazione ω di questo moto armonico è pari a:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \approx 27.39\text{Hz}$$

Per la legge oraria sappiamo che la soluzione dell'equazione differenziale per la grandezza (y-y_0) è data da una funzione cosinusoidale (o sinusoidale) di ampiezza A da determinare:

$$(y-y_0) = A\cos(\omega t)$$

La scelta della funzione cos (invece della funzione sin) è dettata dal fatto che per t=0sec il corpo m parte da uno stato di quiete in posizione y=y_1, che sarà quindi la distanza massima del corpo m dalla posizione di equilibrio y_0. Quindi per t=0sec si deve avere y-y_0=A (con la funzione sin(ωt) si avrebbe invece y-y_0=0 per t=0sec).
Imponendo y=y_1 per t=0sec si ottiene il valore di A:

$$(y - y_0) = A\cos(\omega t) \xrightarrow[t=0]{} A = y_1 - y_0$$

$$A = y_1 - y_0 \approx 0.51\text{m}$$

Per concludere si ha quindi la seguente legge oraria:

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)\cos(\omega t)$$

$$y_1 - y_0 \approx 0.51\text{m}$$

$$\omega \approx 27.39\text{Hz}$$

Punto 3): Dall'equazione oraria del punto 2) si può determinare la velocità $v(t)$ in assenza di attrito:

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)\cos(\omega t)$$

$$v(t) = \frac{dy}{dt} = -(y_1 - y_0)\omega\sin(\omega t)$$

Poiché il moto è rappresentato da una cosinusoide, il corpo m arriva nella posizione di equilibrio y_0 dopo un intervallo di tempo pari a $T/4$, con T periodo del moto armonico. Ne segue che $\omega T/4=\pi/2$ e quindi $\sin(\omega T/4)=1$, ovvero in assenza di attrito la velocità del corpo m è massima (in modulo) quando esso giunge in posizione y_0 ed è pari a:

$$v_M = \left|-(y_1 - y_0)\omega\right|$$

$$v_M = (y_1 - y_0)\omega \approx 13.97\text{m/s}$$

Quindi in assenza di attrito l'energia cinetica K_M nella posizione y_0 sarebbe data da:

$$K_M = \frac{1}{2}mv_M^2$$

$$K_M = \frac{1}{2}m\omega^2(y_1 - y_0)^2$$

In presenza di attrito invece la velocità del corpo m in posizione y_0 è data da v_A=10.0m/s, e la corrispondente energia cinetica sarà $K_A=(1/2)mv_A^2$. La differenza di energia cinetica, $K_M–K_A$, rappresenta l'energia dissipata, ΔE, nello spostamento da y_1 a y_0:

$$\Delta E = K_M - K_A$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\omega^2(y_1 - y_0)^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \approx 475\text{J}$$