Risultati esame scritto Fisica 1 - 22/02/2016

orali: 08-03-2016 alle ore 14.00 presso aula indicata nell'avviso

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
120980	17	ammesso
207739	NC	
115293	10	
207506	NC	
209479	25	ammesso
207542	NC	
207315	NC	
118461	13	
207763	18	ammesso
207545	NC	
118527	NC	
114952	10	
209427	NC	
114683	10	
118478	17	ammesso
118598	13	
114930	NC	
114872	15	
207396	11	
114899	NC	
207540	NC	
118512	NC	
118463	NC	
118554	10	
112082	13	
207890	NC	
114870	17	ammesso
207822	19	ammesso
207462	10	
119844	10	
207487	NC	
207327	19	ammesso
207689	10	
207795	11	
207754	18	ammesso
112089	13	
207478	10	
119884	13	
209961	NC	
207704	NC	
207650	14	

NC=non classificato

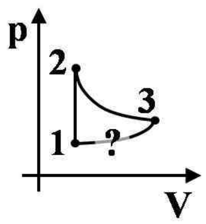
Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 22/02/2016

Problema 1

Sia dato un gas monoatomico che compie un ciclo costituito da una trasformazione isocora (dallo stato 1 allo stato 2), da una trasformazione adiabatica (dallo stato 2 allo stato 3) e da una trasformazione incognita (dallo stato 3 allo stato 1), come rappresentato in figura nel piano (p,V). Sapendo che la pressione nello stato 2 è pari al doppio della pressione dello stato 1, $p_2=2 \cdot p_1$, e che la variazione di entropia del mondo esterno durante la trasformazione incognita è pari a $\Delta S_{31}^{ext}=R \cdot \ln(4)$ J/K, determinare il numero n di moli affinché la trasformazione incognita sia reversibile.

(Suggerimento: si tenga presente che durante una trasformazione reversibile la variazione di entropia dell'universo è nulla).



Problema 2

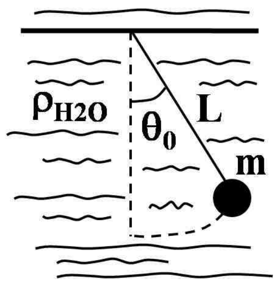
Sia dato un pendolo costituito da una biglia di massa m=10.0kg legata ad un piano orizzontale mediante una fune inestensibile, di massa trascurabile, e lunghezza pari a L=0.5m. La biglia è in Titanio, che ha densità $\rho_{TI}=4.5 \cdot 10^3$kg/m^3, mentre tutto il sistema è completamente immerso in acqua con densità $\rho_{H2O}=1.0 \cdot 10^3$kg/m^3 (vedi figura).

La biglia viene spostata dalla posizione di equilibrio di un angolo θ_0=0.2rad, verso destra in figura, e all'istante t=0sec viene rilasciata. Si suppongano trascurabili tutti gli attriti e le forze viscose.

1) Calcolare la pulsazione ω del pendolo, nell'approssimazione che l'angolo $\theta(t)$ sia sempre $<<1$ per ogni istante t.

2) Determinare la tensione T della fune nel momento in cui la biglia si trova nella punto più basso della sua traiettoria.

3) Calcolare il lavoro fatto dalla spinta di Archimede durante il primo quarto di traiettoria, ovvero quando la biglia partendo dalla posizione iniziale arriva per la prima volta nel punto più basso.



Problema 3

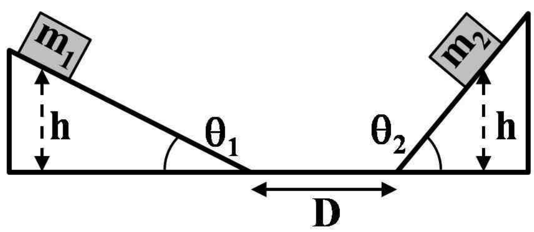
Siano dati due piani inclinati che formano col piano orizzontale angoli rispettivamente pari a θ_1=30° (a sinistra in figura) e θ_2=60° (a destra in figura); i due piani inclinati sono uno di fronte all'altro e le rispettive estremità sono separate da una distanza orizzontale pari a D (vedi figura). Un corpo di massa m_1=10kg si trova sul piano inclinato di sinistra, mentre un corpo di massa m_2=30kg si trova sul piano inclinato di destra. Entrambi i corpi sono inizialmente in quiete e ad un'altezza pari a h=2.0m rispetto al piano orizzontale; all'istante t=0sec entrambi i corpi vengono lasciati liberi di muoversi.

1) Supponendo che non ci siano forze dissipative, determinare il minimo valore di D affinché l'urto fra i due corpi avvenga nel tratto orizzontale che separa i due piani inclinati.

2) Supponendo che l'urto del punto 1) sia perfettamente elastico, determinare l'altezza massima raggiunta da ciascun corpo dopo l'urto.

3) Ripetere il calcolo del punto 1) supponendo che i corpi m_1 e m_2 abbiano attrito con coefficiente μ=0.2 sui due piani inclinati (mentre non c'è attrito nel tratto orizzontale D).

4) Nelle condizioni del punto 3), si supponga che l'urto sia perfettamente anelastico e si determini verso quale piano inclinato si muove il corpo dopo l'urto (sinistra o destra) e l'altezza massima che esso raggiunge.



Soluzione problema 1

Affinché una trasformazione sia reversibile, è necessario che la variazione totale di entropia (quella del sistema più quella dell'ambiente esterno) sia pari a zero:

$$\Delta S_{31} + \Delta S_{31}^{ext} = 0$$

$$\Delta S_{31} = -\Delta S_{31}^{ext} = -R\ln 4$$

Inoltre, dato che l'entropia è una variabile di stato, si ha che la variazione di entropia di un sistema che compie un ciclo è pari a zero, perché lo stato iniziale coincide con quello finale:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0$$

Per quanto riguarda la prima trasformazione, dallo stato 1 allo stato 2, si ha che:

$$\Delta S_{12} = C_V \ln \frac{p_2 V_2^{\gamma}}{p_1 V_1^{\gamma}} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{2p_1}{p_1}$$

$$\Delta S_{12} = \frac{3}{2} nR \ln 2$$

La seconda trasformazione è adiabatica, per cui dQ=0 e la variazione di entropia è nulla:

$$\Delta S_{23} = 0$$

Combinando le tre variazioni di entropia appena calcolate, si ottiene un'equazione per il numero di moli n:

$$\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{31} = 0$$

$$\frac{3}{2} nR \ln 2 + 0 - R\ln 4 = 0$$

$$\frac{3}{2} nR \ln 2 = R\ln 4$$

$$\frac{3}{2} n \ln 2 = 2\ln 2$$

$$n = 4/3 \approx 1.33\text{mol}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Si consideri istante per istante un sistema di assi cartesiani avente l'asse x tangente alla traiettoria circolare del pendolo e diretto verso destra, e l'asse y parallelo alla fune e diretto verso l'alto. Le forze agenti sulla biglia di Titanio sono la forza peso, P, la spinta di Archimede, S_A, e la tensione della fune, T. Le prime due forze sono entrambe verticali, ma la prima è diretta verso il basso, mentre la seconda è diretta verso l'alto; la tensione T è invece sempre parallela alla fune e diretta verso l'alto (ovvero è parallela e concorde all'asse y). Proiettando queste forze sugli assi cartesiani e scrivendo il II principio della dinamica nelle due componenti x e y, si ottiene che:

$$\begin{cases} ma_x = -mg\sin\theta + \rho_{H2O} V_m g \sin\theta \\ ma_y = T + \rho_{H2O} V_m g \cos\theta - mg\cos\theta \end{cases}$$

dove V_m è il volume della biglia, $\theta=\theta(t)$ è l'angolo formato ad ogni istante fra la fune e la direzione verticale; si noti che la spinta di Archimede in modulo è pari a $S_A=\rho_{H2O}V_m g$ dato che la biglia è completamente immersa.

Riarrangiando la prima equazione del sistema si trova che:

$$ma_x = -mg\sin\theta + \rho_{H2O}V_m g\sin\theta$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta + \rho_{H2O}\frac{V_m}{m}g\sin\theta$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\theta + \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}g\theta$$
dove nell'ultimo passaggio si è usata l'approssimazione $\sin\theta \approx \theta$ (valida per θ<<1) e la definizione di densità, per cui $m/V_m = \rho_{TI}$.

Dato che la fune è inestensibile e di lunghezza pari a L, si ha che $\theta = x/L$, da cui segue che:
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{x}{L} + \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}g\frac{x}{L} = -\frac{g}{L}\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)x$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L}\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)x = 0$$
L'ultima espressione scritta è l'equazione di un moto armonico che avviene lungo la traiettoria circolare del pendolo, e che ha per pulsazione la radice quadrata del coefficiente di x:
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)} = 3.9\text{Hz}$$

Si noti che allo stesso risultato si può arrivare considerando il fatto che la presenza della spinta di Archimede, S_A, non fa altro che dimiuire l'effetto della forza di gravità e quindi il valore dell'accelerazione g. Infatti, dato che il corpo è sempre completamente immerso in acqua, esso è soggetto ad una forza lungo l'asse verticale pari alla somma vettoriale di forza peso, P verso il basso, e spinta di Archimede, S_A verso l'alto. Complessivamente si ha allora una forza peso efficace, P_{EFF} verso il basso, pari a:
$$P_{EFF} = P - S_A$$
$$mg_{EFF} = mg - \rho_{H2O}V_m g$$
$$g_{EFF} = g - \rho_{H2O}\frac{V_m}{m}g$$
$$g_{EFF} = g - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}g$$
$$g_{EFF} = g\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)$$
dove g_{EFF} è l'accelerazione di gravità effettivamente sentita dalla biglia di Titanio all'interno dell'acqua. Quindi il pendolo si muove sotto l'azione di un'accelerazione di gravità ridotta, per cui la pulsazione tipica del pendolo nel vuoto, ω_0:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$
deve essere corretta mediante g_{EFF} per ottenere il valore corretto della pulsazione ω:
$$\omega = \sqrt{\frac{g_{EFF}}{L}} = \sqrt{\frac{g}{L}\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)}$$

Punto 2): Ripartendo dal II principio della dinamica scritto lungo l'asse y (seconda equazione del sistema scritto al punto 1) si vede che:

$$ma_y = T + \rho_{H2O} V_m g \cos\theta - mg\cos\theta$$

$$T = ma_y - \rho_{H2O} V_m g \cos\theta + mg\cos\theta$$

$$T = ma_y - mg\cos\theta\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} - 1\right)$$

$$T = m\frac{v_x^2}{L} - mg\cos\theta\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} - 1\right)$$

dove come prima (al punto 1) si è usato che $m/V_m=\rho_{TI}$, e inoltre l'accelerazione a_y lungo l'asse y è stata sostituita con l'accelerazione centripeta (diretta verso l'alto). Si tenga però presente che durante il moto la velocità tangenziale alla traiettoria, v_x, non è costante come accade in un moto circolare uniforme.

Al punto 1) si è visto che il moto lungo x è di tipo armonico, per cui la legge oraria sarà la seguente:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

con x_0 pari alla posizione della biglia all'istante iniziale t=0sec (ovvero con angolo $\theta=\theta_0$) e ω pari alla pulsazione del punto 1). Da questa legge è possibile ricavare la velocità tangenziale v_x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega\sin(\omega t)$$

Dato che si tratta di un moto armonico la biglia raggiungerà il punto più basso dopo ¼ di periodo, ovvero per $\omega t=\pi/2$ da cui segue che la velocità v_x sarà massima in modulo e pari a:

$$|v_x| = x_0\omega|\sin(\omega t)|$$

$$|v_x| = x_0\omega \quad \text{per } \omega t = \pi/2$$

Sostituendo questo valore nell'espressione della tensione T, e tenendo presente che nel punto più basso della traiettoria $\theta=0$ (da cui $\cos\theta=1$) si ottiene che:

$$T = m\frac{x_0^2\omega^2}{L} - mg\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} - 1\right)$$

Si presti attenzione a non confondere θ con ωt; poiché si ha un moto oscillatorio, anche l'angolo θ che identifica la posizione della biglia oscilla nel tempo, mentre ωt è sempre crescente.

Dalla relazione $x_0=L\cdot\theta_0$ e dall'espressione trovata al punto 1) per ω, si ottiene il valore cercato della tensione T:

$$T = m\frac{x_0^2\omega^2}{L} - mg\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} - 1\right)$$

$$T = m\frac{L^2\theta_0^2}{L}\frac{g}{L}\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right) - mg\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} - 1\right)$$

$$T = mg\theta_0^2\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right) + mg\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)$$

$$T = mg\left(1 - \frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}}\right)\left(\theta_0^2 + 1\right) \approx 79\text{N}$$

Punto 3): Il lavoro infinitesimo, dW_{SA}, compiuto dalla spinta di Archimede, $\mathbf{S_A}$ (vettoriale), durante la traiettoria del pendolo è dato dal prodotto scalare di forza per spostamento infinitesimo, $\mathbf{ds}$:

$$dW_{SA} = \mathbf{S_A} \cdot \mathbf{ds}$$

Dato che S_A è sempre verticale e diretto verso l'alto, mentre nel primo ¼ di traiettoria lo spostamento verticale della biglia è verso il basso, il risultato del prodotto scalare sarà:

$$dW_{SA} = -S_A dh$$

dove dh è solo la componente verticale (in modulo, dato che abbiamo messo il segno "–" di fronte l'espressione) dello spostamento $\mathbf{ds}$. Poiché S_A è costante durante tutta la traiettoria, dagli infinitesimi possiamo passare direttamente alle differenze macorscopiche, ΔW_{SA} e Δh:

$$\Delta W_{SA} = -S_A \Delta h$$

$$\Delta W_{SA} = -(\rho_{H2O} V_m g)\Delta h$$

$$\Delta W_{SA} = -\left(\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} mg\right)\Delta h$$

dove Δh è il modulo dello spostamento verticale durante il primo ¼ di traiettoria:

$$\Delta h = L \cdot (1 - \cos\theta_0)$$

Si ha allora che il lavoro compiuto da S_A, nel primo ¼ di traiettoria, è pari a:

$$\Delta W_{SA} = -\frac{\rho_{H2O}}{\rho_{TI}} mgL(1 - \cos\theta_0) \approx -0.22\text{J}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): In assenza di forze di attrito possiamo usare la conservazione dell'energia per calcolare le velocità finali, v_{01} e v_{02}, dei due corpi:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = m_1 gh \rightarrow v_{01} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{02}^2 = m_2 gh \rightarrow v_{02} = \sqrt{2gh}$$

Come si vede le velocità finali sono uguali in modulo, ma hanno ovviamente versi opposti sul piano orizzontale D. Se sul piano orizzontale si prende come positivo un asse x diretto verso destra, si avrà $v_{01}>0$ e $v_{02}<0$ per tenere conto del verso delle velocità (il corpo 1 viaggia verso il corpo 2 e viceversa).

Mentre sono sui piani inclinati i due corpi sono soggetti alla forza peso, la cui componente parallela al piano inclinato fornisce un'accelerazione pari rispettivamente a $a_1=g\sin\theta_1$ e $a_2=g\sin\theta_2$. Dato che sui piani inclinati (parallelamente ad essi) si hanno per entrambi i corpi dei moti uniformemente accelerati, possiamo calcolare il tempo impiegato da ciascun corpo ad arrivare alla fine del piano inclinato:

$$\begin{cases} v_{01} = a_1 t_1 \\ v_{02} = a_2 t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{v_{01}}{a_1} = \dfrac{\sqrt{2gh}}{g\sin\theta_1} \\ t_2 = \dfrac{v_{02}}{a_2} = \dfrac{\sqrt{2gh}}{g\sin\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \dfrac{1}{\sin\theta_1} \\ t_2 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} \dfrac{1}{\sin\theta_2} \end{cases}$$

dove per entrambi i tempi si è usato il modulo della velocità finale, pari a $v_0=\sqrt{(2gh)}$, trovato precedentemente. Poiché $\theta_1<\theta_2$, dal risultato trovato si ha che $t_1>t_2$. Affinché l'urto avvenga nel tratto orizzontale D è necessario che il tempo t_1, impiegato dal corpo m_1 più lento ad arrivare alla fine della discesa, non sia maggiore del tempo t_2 più il tempo che il corpo m_2 impiega ad attraversare il tratto orizzontale D. In formule dobbiamo avere che:

$$t_1 < t_2 + t_D$$

$$t_D = \frac{D}{v_0} = \frac{D}{\sqrt{2gh}}$$

dove t_D è il tempo impiegato dal corpo m_2 a percorrere il tratto orizzontale D. Si tenga presente che dalla fine della discesa fino a tutto D il moto è a velocità costante, data l'assenza di attrito sul tratto orizzontale. Sostituendo le espressioni trovate per i tempi t_1, t_2 e t_D si ha che:

$$t_1 < t_2 + t_D$$

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin\theta_1} < \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin\theta_2} + \frac{D}{\sqrt{2gh}}$$

$$\frac{D}{\sqrt{2gh}} > \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin\theta_1} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sin\theta_2}$$

$$D > 2h\left(\frac{1}{\sin\theta_1} - \frac{1}{\sin\theta_2}\right) \approx 3.4\text{m}$$

Punto 2): Nelle condizioni del punto 1), l'urto avviene nel tratto orizzontale D, con velocità iniziale di m_1 pari a $v_{01}=+v_0=\sqrt{(2gh)}$ e velocità iniziale di m_2 pari a $v_{02}=-v_0=-\sqrt{(2gh)}$. L'urto è perfettamente elastico per cui si conservano quantità di moto e energia cinetica:

$$\begin{cases} m_1 v_{01} + m_2 v_{02} = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2} \\ v_{01} + v_{f1} = v_{02} + v_{f2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_0 - m_2 v_0 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2} \\ v_0 + v_{f1} = -v_0 + v_{f2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_0 - m_2 v_0 = m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2} \\ v_{f2} = 2v_0 + v_{f1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_0 - m_2 v_0 = m_1 v_{f1} + m_2 \left(2v_0 + v_{f1}\right) \\ v_{f2} = 2v_0 + v_{f1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_0 - 3m_2 v_0 = (m_1 + m_2) v_{f1} \\ v_{f2} = 2v_0 + v_{f1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{f1} = \dfrac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} v_0 \\ v_{f2} = \dfrac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{f1} = \dfrac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} = -12.5\text{m/s} \\ v_{f2} = \dfrac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} = 0\text{m/s} \end{cases}$$

Si vede quindi che il corpo m_1 torna indietro verso il piano inclinato sulla sinistra, mentre il corpo m_2 rimane fermo subito dopo l'urto. Quindi il corpo m_2 non si muove dall'altezza h_2=0m, mentre per m_1 si può trovare la quota massima, h_1 raggiunta dopo l'urto, riapplicando la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 = m_1 g h_1$$

$$h_1 = \frac{v_{f1}^2}{2g} = \left(\frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 h = 8.0\text{m}$$

Punto 3): Nel caso in cui ci sia attrito con coefficiente μ sui piani inclinati, non si ha solo la componente della forza peso parallela al piano ad essere responsabile del moto, ma entra in gioco anche la forza di attrito di modulo $|F_A|=\mu m_i g \cos\theta_i$ (col pedice i=1,2 a seconda del corpo considerato) che si oppone al moto di ciascuna massa. Le accelerazioni lungo i piani inclinati sono allora (in modulo):

$$\begin{cases} a_1 = g(\sin\theta_1 - \mu \cos\theta_1) \\ a_2 = g(\sin\theta_2 - \mu \cos\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = g \sin\theta_1 (1 - \mu \cot\theta_1) \\ a_2 = g \sin\theta_2 (1 - \mu \cot\theta_2) \end{cases}$$

Si tratta di nuovo di moti uniformemente accelerati, e lo spazio percorso lungo il piano inclinato è pari a $l_1=h/\sin\theta_1$ per il corpo m_1, e $l_2=h/\sin\theta_2$ per il corpo m_2. Per calcolare le velocità finali applichiamo la formula $v^2=2a\cdot l$, valida per i moti uniformemente accelerati, dove si ha velocità iniziale nulla, a pari all'accelerazione uniforme del moto e l pari allo spazio percorso:

$$\begin{cases} v_{01}^2 = 2a_1 l_1 = 2g \sin\theta_1 (1 - \mu \cot\theta_1) \dfrac{h}{\sin\theta_1} \\ v_{02}^2 = 2a_2 l_2 = 2g \sin\theta_2 (1 - \mu \cot\theta_2) \dfrac{h}{\sin\theta_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{01} = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta_1)} \\ v_{02} = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta_2)} \end{cases}$$

Dalle velocità finali v_{01} e v_{02} si possono calcolare i tempi t_1 e t_2 impiegati ad arrivare alla fine dei rispettivi piani inclinati, usando la formula $v=a\cdot t$ valida per i moti uniformemente accelerati (partendo dallo stato di quiete):

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{v_{01}}{a_1} \\ t_2 = \dfrac{v_{02}}{a_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta_1)} \big/ g\sin\theta_1(1-\mu\cot\theta_1) \\ t_2 = \sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta_2)} \big/ g\sin\theta_2(1-\mu\cot\theta_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\dfrac{1}{(1-\mu\cot\theta_1)}} \approx 1.6\text{s} \\ t_2 = \dfrac{1}{\sin\theta_2}\sqrt{\dfrac{2h}{g}\dfrac{1}{(1-\mu\cot\theta_2)}} \approx 0.8\text{s} \end{cases}$$

Dato che $t_1>t_2$, come nel punto 1) bisogna imporre la seguente condizione affinché l'urto avvenga nel tratto orizzontale D (ricordando che nel tratto D non c'è attrito):

$$t_1 < t_2 + t_D$$

$$t_D = \frac{D}{v_{02}}$$

Sostituendo i valori trovati, si ottiene che:

$$t_1 < t_2 + t_D$$

$$\frac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{1}{(1-\mu\cot\theta_1)}} < \frac{1}{\sin\theta_2}\sqrt{\frac{2h}{g}\frac{1}{(1-\mu\cot\theta_2)}} + \frac{D}{\sqrt{2gh(1-\mu\cot\theta_2)}}$$

$$2h\left(\frac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\frac{1}{(1-\mu\cot\theta_1)}} - \frac{1}{\sin\theta_2}\sqrt{\frac{1}{(1-\mu\cot\theta_2)}}\right) < \frac{D}{\sqrt{(1-\mu\cot\theta_2)}}$$

$$D > 2h\left(\frac{1}{\sin\theta_1}\sqrt{\frac{1-\mu\cot\theta_2}{1-\mu\cot\theta_1}} - \frac{1}{\sin\theta_2}\right) \approx 4.7\text{m}$$

Punto 4): Con i risultati del punto 3) applichiamo la conservazione della quantità di moto ad un urto perfettamente anelastico fra i due corpi. Le velocità iniziali sono $+v_{01}$ e $-v_{02}$ se si considera un asse orizzontale positivo diretto verso destra.

$$m_1 v_{01} - m_2 v_{02} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{01} - m_2 v_{02}}{m_1 + m_2}$$

$$v_f = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[m_1 \sqrt{2gh(1 - \mu \cot\theta_1)} - m_2 \sqrt{2gh(1 - \mu \cot\theta_2)} \right]$$

$$v_f = \frac{\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \left[m_1 \sqrt{1 - \mu \cot\theta_1} - m_2 \sqrt{1 - \mu \cot\theta_2} \right] \approx -3.15 \text{m/s}$$

Dato che la velocità finale v_f è negativa il corpo si muove verso sinistra e torna sul piano inclinato con θ_1=30°. Calcoliamo l'altezza massima che esso raggiunge dopo l'urto, considerando che l'energia cinetica subito dopo l'urto in parte si converte in energia potenziale e in parte viene dissipata dal lavoro fatto dalla forza di attrito sul piano inclinato di sinistra:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_f^2 = (m_1 + m_2) g h_f + (m_1 + m_2) \mu g \cos\theta_1 \frac{h_f}{\sin\theta_1}$$

$$\frac{1}{2} v_f^2 = g h_f (1 + \mu \cot\theta_1)$$

$$h_f = \frac{v_f^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \mu \cot\theta_1} \approx 0.38 \text{m}$$