Risultati esame scritto Fisica 2 - 20/06/2016
orali: 30-06-2016 alle ore 11.00 presso aula C

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
114920	11	
118503	18	ammesso
209479	18	ammesso
112852	17	ammesso
118470	13	
114884	21	ammesso
112836	17	ammesso
114893	14	
114922	10	
115088	nc	
118481	14	
110667	12	
118552	17	ammesso
207822	12	
112892	19	ammesso
108488	13	
112110	10	
207754	21	ammesso
118497	13	
114979	11	
113481	13	
109862	17	ammesso
118599	12	
118529	18	ammesso

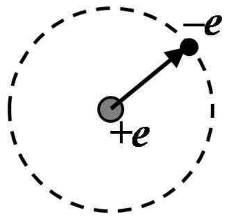
nc=non classificato

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 20/06/2016

Problema 1

Un atomo di idrogeno è costituito da un nucleo avente la carica di un protone, $Q_+=+|e|$, attorno al quale ruota un elettrone avente carica negativa, $Q_-=-|e|$ (dove e è il modulo della carica dell'elettrone). Si assuma che l'unica forza presente sia la forza di Coulomb, e che l'elettrone si muova di moto circolare uniforme. Dimostrare che l'energia $E(r)$ dell'elettrone varia con la distanza r dal nucleo secondo la seguente formula:



$$E(r)=-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Problema 2

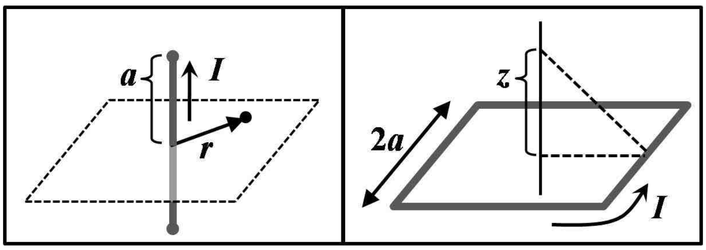
Sia dato un filo rettilineo finito di lunghezza pari a $2a$ e percorso da corrente I.

1) Dato un piano passante per il centro del filo e perpendicolare ad esso (vedi figura a sinistra), determinare il vettore campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) generato su un punto di questo piano a distanza r dal centro del filo. [Esprimere il risultato in funzione dei parametri a, I e r, oltre che delle costanti universali se necessario].

2) Sia data una spira quadrata di lato $2a$ e percorsa da corrente I in senso antiorario in figura (a destra); utilizzare il risultato precedente per determinare il vettore campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) generato sull'asse perpendicolare alla spira e passante per il suo centro, a distanza z dal centro.

[Esprimere il risultato in funzione dei parametri a, I e z, oltre che delle costanti universali se necessario].

3) Confrontare il risultato ottenuto per la spira quadrata con l'analogo risultato per una spira circolare, nel caso in cui le due spire abbiano la stessa area e per $z>>a$.



Problema 3

Sia dato un condensatore piano a facce quadrate di lato l e distanza fra le piastre pari a $h<<l$. All'interno del condensatore si trova un corpo dielettrico a forma di parallelepipedo con facce quadarate di lato l e spessore h, che inizialmente occupa esattamente il volume interno del condensatore. La costante dielettrica relativa è pari a ε_r e il parallelepipedo ha massa m. Il corpo dielettrico è libero di muoversi lungo l'asse x parallelo a uno dei lati delle facce quadrate (vedi figura), e il centro del dielettrico si trova inizialmente nella posizione x=0 (l'origine dell'asse x coincide col centro del condensatore). Le piastre del condensatore sono collegate a un generatore di tensione continua la cui differenza di potenziale è pari a V_0.

1) Determinare l'espressione della capacità del condensatore in funzione di x, $C(x)$, supponendo che il dielettrico venga spostato dall'origine in una posizione generica tale che $|x|<l$.

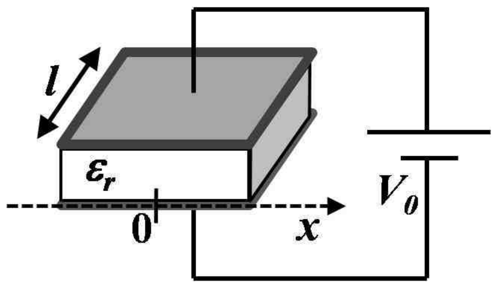
2) Calcolare il lavoro $W_G(x)$ fatto dal generatore per uno spostamento del dielettrico da x=0 ad una posizione generica x tale che $|x|<l$.

3) Calcolare il lavoro $W_E(x)$ fatto dalle forze elettrostatiche per uno spostamento analogo a quello del punto 2), e il lavoro totale $W_{TOT}(x)$ fatto dall'intero sistema (condensatore più generatore) per tale spostamento.

4) Tenendo conto che $dW_{TOT}(x)=F\cdot dx$, calcolare la forza $F(x)$ che agisce sul dielettrico in funzione di x, per $|x|<l$, e dare una rappresntazione grafica di $F(x)$ in funzione di x.

5) Posto il dielettrico nella posizione $x=l/2$, calcolare la corrente I che circola nel generatore fino a quando il dielettrico non arriva nella posizione x=0, assumendo che il dielettrico parta da $x=l/2$ con velocità nulla.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri l, h, m, ε_r, V_0, in funzione della coordinata x ove richiesto, oltre che delle costanti universali ove necessario].



Soluzione problema 1

L'energia E dell'elettrone intorno al nucleo sarà pari alla somma di energia cinetica e potenziale:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + (-e)V(r)$$

dove l'enegia potenziale U è data dall'interazione della carica dell'elettrone, $-e$, col potenziale elettrostatico, $V(r)$, generato dal nucleo nello spazio circostante. Usiamo per $V(r)$ l'espressione del potenziale generato dalla carica puntiforme $+e$ del nucleo a distanza genenerica r:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$$

dove con tale espressione si è posto $V(r=\infty)=0$. Tornando all'energia E dell'elettrone si ha quindi che:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ricordando che la forza di Coulomb fra una carica positiva e una negativa è una forza centrale attrattiva, ne segue che la forza di Coulomb è la forza centripeta responsabile del moto circolare uniforme:

$$ma_C = F_{Coulomb}$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dove a_C è l'accelerazione centripeta che è pari a v^2/r. Dall'ultima formula scritta possiamo trovare un'espressione per mv^2 da sostituire successivamente nell'energia cinetica:

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Quindi l'energia dell'elettrone diventa:

$$E(r) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

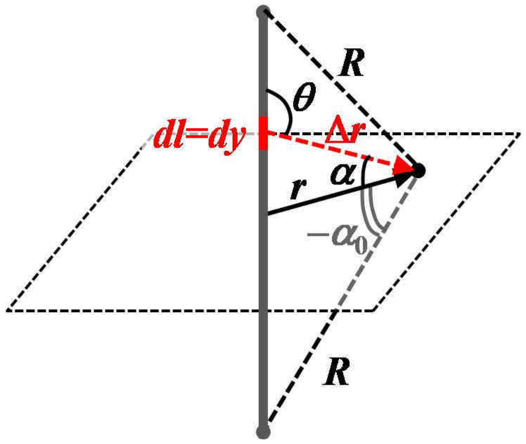
Soluzione problema 2

Punto 1): Come nel caso del filo infinito percorso da corrente I, il vettore campo magnetico **B** generato da tutto il filo a distanza r da esso, giace nel piano ortogonale al filo e ha direzione e verso dati dalla tangente alla circonferenza (avente il centro coincidente con la posizione del filo) che gira in senso antiorario attorno alla corrente I del filo. Per quanto riguarda il modulo del campo magnetico **B**, dividiamo il filo in tante porzioni infinitesime dl, ciascuna delle quali genera una porzione di campo magnetico dB:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|\mathbf{dl}\times\mathbf{\Delta r}|}{\Delta r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cdot \Delta r\cdot\sin\theta}{\Delta r^3}$$

dove nell'ultima formula è stato esplicitato il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{dl}\times\mathbf{\Delta r}$ utilizzando il seno dell'angolo compreso i due vettori, $\sin\theta$. Dalla figura si vede che $\sin\theta=\sin(90°-\alpha)$ e quindi $\sin\theta=\cos\alpha$, dove



α è l'angolo compreso fra il vettore $\mathbf{\Delta r}$ e il vettore $\mathbf{r}$, quest'ultimo essendo la proiezione di $\mathbf{\Delta r}$ sul piano ortogonale al filo. Riarrangiando l'ultima formula si ottiene che:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \cdot \sin\theta}{\Delta r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl \cdot \cos\alpha}{\Delta r^2}$$

Utilizzando le seguenti uguaglianze (fare riferimento alla figura):

$$y = r\tan\alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{r}{\cos^2\alpha} \rightarrow dy = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$dl = dy = \frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$r = \Delta r\cos\alpha \rightarrow \Delta r^2 = \frac{r^2}{\cos^2\alpha}$$

all'interno della formula ottenuta per *dB*, si arriva a:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dy}{r^2/\cos^2\alpha}\cos\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\frac{r d\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{r^2}{\cos^2\alpha}}\cos\alpha$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\cos\alpha}{r}d\alpha$$

Quest'ultimo è il contributo infinitesimo *dB* dato al campo magnetico totale da una porzione infinitesima *dl* del filo. Sommando tutti questi contributi per l'intera lunghezza del filo, si ha il campo magnetico totale *B*:

$$B(r) = \int dB$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}\cos\alpha \cdot d\alpha$$

Nell'ultimo passaggio la distanza *r* dal filo è stata portata fuori dal segno di integrale perchè si tratta della proiezione di Δr sul piano ortogonale al filo, ed è costante per tutte le porzioni di filo *dl*. Gli estremi di integrazione sono dati da $-\alpha_0$ e $+\alpha_0$, che sono gli angoli che individuano le estermità del filo (nel caso di filo infinito si avrebbe $\alpha_0=\pi/2$). Risolvendo il precedente integrale si ottiene che:

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\sin\alpha]_{-\alpha_0}^{+\alpha_0}$$

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\sin\alpha_0-\sin(-\alpha_0)]$$

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}2\sin\alpha_0=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\sin\alpha_0$$

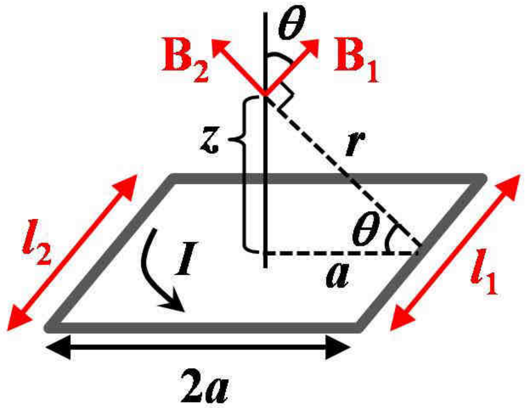
Per poter esprimere il risultato in funzione dei parametri del problema, è necessario esprimere diversamente il $\sin\alpha_0$. Con riferimento alla figura abbiamo che:

$$\left.\begin{array}{l} R=\sqrt{a^2+r^2} \\ R\sin\alpha_0=a \end{array}\right\}\rightarrow \sin\alpha_0=\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

In definitiva si ha la seguente espressione per il campo magnetico $B(r)$:

$$B(r)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}}$$

Punto 2): La spira è costituita da quattro lati, ciascuno di lunghezza pari a $2a$ come il filo del punto 1). Un punto P situato a distanza z sull'asse verticale passante per il centro della spira, si trova a distanza r dal centro di ciascuno dei quattro lati della spira (vedi figura), con $r=(a^2+z^2)^{1/2}$.



Quindi il campo magnetico generato in P da un solo lato della spira obbedisce alla legge trovata al punto 1), che ci restituisce il modulo del campo magnetico $B_1(r)$, dove B_1 è il campo generato da un solo lato. Come detto al punto 1), tale campo magnetico ha la direzione e verso della tangente alla circonferenza che gira in senso antiorario intorno al filo (di un solo lato). Il lato l_1 in figura genera allora il campo magnetico B_1, che forma un angolo θ con l'asse verticale passante per il centro della spira. Il lato opposto, l_2, genera il campo B_2 (in figura) che ha stesso modulo di B_1, ma direzione e verso riportati in figura. Anch'esso forma un angolo θ con l'asse verticale, ma è diretto verso sinistra in figura (mentre B_1 è diretto verso destra). Ne consegue che le componenti orizzontali di B_1 e B_2 si annullano reciprocamente, mentre le componenti verticali sono uguali e si sommano. Analogo discorso vale per gli altri due lati, quindi il campo magnetico totale B_{TOT} è parallelo all'asse verticale e diretto verso l'alto in figura (con la corrente I che gira in senso antiorario vista dall'alto); il modulo di B_{TOT} è pari a 4 volte la componente verticale di B_1 (una per ciascun lato).

Quindi $B_{TOT}=4\cdot B_{1,z}$, dove $B_{1,z}$ è la componente verticale di B_1:

$$B_1(z)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{a}{\left(a^2+r^2\right)^{1/2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{a}{\left(a^2+a^2+z^2\right)^{1/2}}$$

dove si è fatto uso del fatto che $r=(a^2+z^2)^{1/2}$; per la componente verticale abbiamo che:

$$B_{1,z}(z)=\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{a}{\left(2a^2+z^2\right)^{1/2}}\cos\theta$$
$$B_{1,z}(z)=\frac{\mu_0 I}{2\pi\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{a}{\left(2a^2+z^2\right)^{1/2}}\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}$$
Nell'ultimo passaggio si è usata la relazione (vedi figura dove è messo in evidenza quali sono gli angoli uguali e pari a θ):
$$\cos\theta=\frac{a}{r}=\frac{a}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Infine per il campo magnetico totale B_{TOT} si ha che:
$$B_{TOT}(z)=4\cdot B_{1,z}(z)$$
$$B_{TOT}(z)=\frac{\mu_0 I\left(4a^2\right)}{2\pi\left(a^2+z^2\right)\left(2a^2+z^2\right)^{1/2}}$$

Punto 3): Il campo magnetico generato da una spira circolare sul suo asse a distanza z dal centro della spira, $B_{CIRC}(z)$, è dato da:
$$B_{CIRC}(z)=\frac{\mu_0 I\left(\pi R^2\right)}{2\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$
dove R è il raggio della spira. Poiché la spira quadrata ha lato pari a $2a$, la sua superficie S è data da $4a^2$ (che compare al numeratore dell'ultima espressione trovata al punto 2); per una spira circolare si ha invece che la superficie S è data da πR^2 (che compare al numeratore dell'ultima espressione scritta). Allora i campi magnetici di spira circolare e spira quadrata di uguale superficie S sono dati da:
$$B_{CIRC}(z)=\frac{\mu_0 IS}{2\pi\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}$$
$$B_{TOT}(z)=\frac{\mu_0 IS}{2\pi\left(a^2+z^2\right)\left(2a^2+z^2\right)^{1/2}}$$
Per z>>1 si ottiene che il termine dominante al denominatore è proprio z, e per i campi magnetici di spira circolare e quadrata di uguale superficie S si ottiene che:
$$B_{CIRC}(z>>1)\rightarrow\frac{\mu_0 IS}{2\pi z^3}$$
$$B_{TOT}(z>>1)\rightarrow\frac{\mu_0 IS}{2\pi z^3}$$
Quindi a grande distanza z dal centro della spira, il campo magnetico generato lungo l'asse passante per il centro della spira è lo stesso sia per spira circolare e che per spira quadrata quando queste hanno uguale superficie S e sono percorse da uguale corrente I, ovvero quando le due spire hanno lo stesso momento di dipolo magnetico $m=I\cdot S$.

Soluzione problema 3

Punto 1): Quando il dielettrico viene spostato di un tratto x>0 (verso destra in figura), il condensatore risulta essere il parallelo fra due condensatori, di cui uno completamente vuoto e di lunghezza pari a x, e l'altro completamente pieno di dielettrico e di lunghezza pari a $l–x$. Per entambi questi condensatori l'altro lato della superficie è dato dal lato l. Utilizzando l'espressione della capacità per condensatori piani a facce parallele, si hanno le seguenti espressioni per i due condensatori:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 l x}{h}; \qquad C_D = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l(l-x)}{h}$$

dove C_0 e C_D sono rispettivamente la capacità della parte vuota e di quella con dielettrico. Dato che queste due parti sono in parallelo, la capacità totale sarà la somma delle precedenti:

$$C_{TOT} = C_0 + C_D$$

$$C_{TOT}(x) = \frac{\varepsilon_0 l x}{h} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r l(l-x)}{h}$$

$$C_{TOT}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{h}[x + \varepsilon_r(l-x)]$$

$$C_{TOT}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l - x(\varepsilon_r - 1)]$$

Come detto sopra, abbiamo finora considerato uno spostamento $x>0$. Ma se consideriamo uno spostamento di pari entità nel vesro opposto (ovvero $x<0$), il valore della capacità totale C_{TOT} deve essere la stessa ottenuta nell'ultima espressione, perché si tratta fisicamente dello stesso oggetto. Per poter ottenere lo stesso valore di C_{TOT} per $x>0$ e $x<0$ quando il modulo $|x|$ è lo stesso, è necessario sostituire a x il suo modulo:

$$C_{TOT}(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l - (\varepsilon_r - 1)|x|]$$

Quest'ultima espressione ci da' la giusta dipendenza di C_{TOT} da x, per tutti i valori di x (sia positivi che negativi).

Punto 2): Quando il dielettrico viene spostato, si ha una variazione della capacità C_{TOT}; poiché la differenza di potenziale ai capi del condensatore è costante e pari a V_0, allo spostamento x corrisponde anche una variazione di carica Q sulle piastre del condensatore:

$$Q(x) = C_{TOT}(x)V_0$$

$$Q(x) = V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l - (\varepsilon_r - 1)|x|]$$

dove abbiamo contestualizzato la legge generale per i condensatori al presente problema (con Q e C dipendenti da x). L'ultima espressione scritta rappresenta il valore della carica Q per uno spostamento x del dielettrico; per $x=0$ si ha invece che:

$$Q_0 = V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l]$$

Ne segue che la variazione di carica ΔQ per uno spostamento del dielettrico da $x=0$ è pari a:

$$\Delta Q = Q(x) - Q_0$$

$$\Delta Q = V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l - (\varepsilon_r - 1)|x|] - V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}[\varepsilon_r l]$$

$$\Delta Q = -V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

Dato che per un dielettrico si ha sempre che $\varepsilon_r>1$, dall'ultima espressione segue che la carica sulle piastre del condensatore diminuisce ($\Delta Q<0$) se il dielettrico si sposta verso l'esterno del condensatore (in questo caso di condensatore non isolato e con differenza di potenziale costante). Questa variazione di carica ΔQ attraversa il generatore e si avrà, in corrispondenza di tale passaggio di carica, un lavoro fatto dal generatore pari a:

$$W_G(x) = V_0 \cdot \Delta Q$$

$$W_G(x) = -V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

Il valore negativo di W_G indica che il lavoro è subito dal generatore, ovvero il generatore accumula energia per uno spostamento del dielettrico da x=0 verso l'esterno.

Punto 3): L'energia potenziale elettrostatica accumulata nel condensatore, per una posizione x generica tale che $|x|<l$, è pari a:

$$U_E(x) = \frac{1}{2} C_{TOT}(x) V_0^2$$

$$U_E(x) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[\varepsilon_r l - (\varepsilon_r - 1)|x|\right] V_0^2$$

Per x=0 si ha allora che:

$$U_{E,0} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[\varepsilon_r l\right] V_0^2$$

Per uno spostamento del dielettrico da x=0 fino ad una generica posizione x si ha allora la seguente variazione di energia potenziale elettrostatica ΔU_E:

$$\Delta U_E = U_E(x) - U_{E,0}$$

$$\Delta U_E = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[\varepsilon_r l - (\varepsilon_r - 1)|x|\right] V_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[\varepsilon_r l\right] V_0^2$$

$$\Delta U_E = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

Poiché il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche è pari alla variazione di energia potenziale cambiata di segno, si ha allora che:

$$W_E = -\Delta U_E$$

$$W_E = \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

dove l'ultima espressione rappresenta il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche per uno spostamento del dielettrico da x=0 ad una generica posizione x tale che $|x|<l$.

Sommando il lavoro fatto dal generatore W_G, e quello fatto dalle forze elettrostatiche (interazione coulombiana all'interno del condensatore) W_E, si ottiene il lavoro totale fatto dal sistema per spingere fuori il dielettrico:

$$W_{TOT} = W_G + W_E$$

$$W_{TOT}(x) = -V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x| + \frac{1}{2} V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

$$W_{TOT}(x) = -\frac{1}{2} V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)|x|$$

Dato che $W_{TOT}<0$, ne segue che il sistema elettrico nella sua interezza (generatore più condensatore) subisce un lavoro se il dielettrico viene estratto, ovvero è necessario compiere lavoro dall'esterno per estrarre il dielettrico.

Punto 4): Dall'espressione data nel testo del problema, $dW_{TOT}(x)=F\cdot dx$, segue che la forza F a cui è soggetta il dielettrico in assenza di azioni esterne è pari alla derivata rispetto a x del risultato appena trovato per $W_{TOT}(x)$:

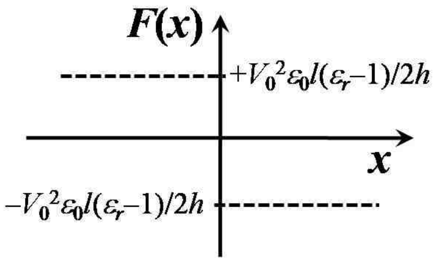
$$F(x)=\frac{dW_{TOT}}{dx}$$

$$F(x)=\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{2}V_0^2\,\frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r-1)|x|\right]$$

$$F(x)=-\frac{1}{2}V_0^2\,\frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r-1)\frac{d|x|}{dx}$$

$$F(x)=-\frac{V_0^2\varepsilon_0 l}{2h}(\varepsilon_r-1)sign(x)$$

dove è stata usata la funzione $sign(x)$ come derivata del modulo $|x|$ (la funzione $sign(x)$ restituisce il segno dell'argomento, ovvero è pari a +1 per $x>0$ e pari a –1 per $x<0$). La forza F è quindi costante in modulo ed è sempre diretta verso l'interno del condensatore, ovvero è negativa (diretta verso sinistra) per $x>0$ ed è positiva (diretta verso destra) per $x>0$ (nella condizione di $|x|<l$). Segue una rappresentazione grafica di $F(x)$ in funzione di x, sempre per $|x|<l$:



Punto 5): Nel punto 2) è stata trovata l'espressione della carica $Q(x)$ presente sulle piastre del condensatore:

$$Q(x)=V_0\,\frac{\varepsilon_0 l}{h}\left[\varepsilon_r l-(\varepsilon_r-1)|x|\right]$$

Man mano che il dielettrico si muove da $x=l/2$ verso $x=0$, si ha variazione di carica dQ sulle piastre del condensatore, e tale dQ coincide con la carica che attraversa il generatore. Ne segue che la corrente che attraversa il generatore durante tale moto è data da:

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$I=-V_0\,\frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r-1)sign(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$

Nell'ultima espressione rimane da determinare dx/dt che coincide con la velocità del dielettrico, v. Siccome è nota la forza totale $F(x)$ che agisce sul dielettrico in funzione di x, possiamo scrivere il II principio della dinamica per il dielttrico:

$$ma_x=F(x)$$

$$ma_x=-\frac{1}{2}V_0^2\,\frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r-1)sign(x)$$

Poiché il problema chiede la corrente I per dielettrico che si muove da $x=l/2$ e arriva in $x=0$, si ha che $x>0$ durante questo spostamento e quindi $sign(x)=1$. L'ultima espressione diventa allora:

$$ma_x = -\frac{1}{2}V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)$$
$$a_x = -\frac{1}{2m}V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)$$
L'accelerazione è quindi costante, da cui segue che siamo in presenza di un moto uniformemente accelerato (da $x=l/2$ fino a $x=0$). In tal caso si ha la seguente espressione per la velocità $v(x)$ in funzione della posizione x:
$$v^2(x) = v_0^2 + 2a_x \Delta x$$
$$v^2(x) = 2a_x\left(x - \frac{l}{2}\right)$$
dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito le condizioni iniziali, ovvero dielettrico che parte da $x=l/2$ con velocità iniziale v_0 nulla. Sostituendo l'espressione di a_x si arriva a:
$$v^2(x) = 2a_x\left(x - \frac{l}{2}\right)$$
$$v^2(x) = 2\left[-\frac{1}{2m}V_0^2 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)\right]\left(x - \frac{l}{2}\right)$$
$$v^2(x) = \frac{V_0^2 \varepsilon_0 l}{mh}(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{l}{2} - x\right)$$
$$v(x) = -\sqrt{\frac{V_0^2 \varepsilon_0 l}{mh}(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{l}{2} - x\right)}$$
Nell'ultimo passaggio è stata presa la soluzione con radice negativa, perché il moto è uniformemente accelerato verso l'interno del condensatore e quindi la velocità è diretta verso sinistra in figura (nella direzione dell'asse negativo delle x). Abbiamo determinato la velocità in fuzione di x, perché il testo del problema richiede di esprimere il risultato in funzione della coordinata x ma non in funzione del tempo t. Sostituendo la formula appena trovata per $v(x)$ all'espressione della corrente $I(x)$ si ottiene che:
$$I(x) = -V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)\cdot v(x)$$
$$I(x) = +V_0 \frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)\sqrt{\frac{V_0^2 \varepsilon_0 l}{mh}(\varepsilon_r - 1)\left(\frac{l}{2} - x\right)}$$
$$I(x) = V_0^2 \sqrt{\frac{1}{m}\left(\frac{l}{2} - x\right)}\left[\frac{\varepsilon_0 l}{h}(\varepsilon_r - 1)\right]^{3/2}$$
Come si vede la corrente $I(x)$ è positiva per x che va da $+l/2$ a 0, ovvero la carica attraversa il generatore concordemente alla differenza di potenziale V_0 man mano che il dielettrico è risucchiato all'interno del condensatore (discorso contrario se invece il dielettrico si sposta da $x=0$ verso l'esterno, con conseguente corrente I che si muove in verso opposto a V_0).