Risultati esame scritto Fisica 1 - 08/06/2016
orali: 28-06-2016 alle ore 11.00 presso aula indicata nell'avviso

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
207579	nc	
120819	nc	
114898	nc	
118461	10	
207545	nc	
118456	nc	
115162	12	
118527	nc	
114952	nc	
209427*	12	
114683	18	ammesso
118598	17	ammesso
114916	nc	
114930	nc	
207571	17	ammesso
207396	21	ammesso
207540*	11	
118463	12	
118554	12	
117836	17	ammesso
114925	nc	
112082	17	ammesso
207890	14	
208491*	12	
207462	17	ammesso
200031	20	ammesso
118486	17	ammesso
108488*	nc	
119844	13	
118550	19	ammesso
118524	17	ammesso
209203	13	
207328	21	ammesso
107152*	nc	
112089	19	ammesso

nc=non classificato

Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 08/06/2016

Problema 1

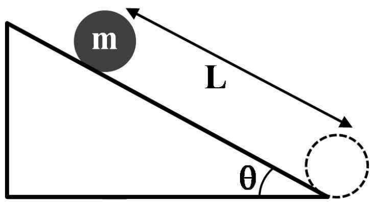
Sia data una sfera di massa m e raggio R inizialmente in quiete su un piano inclinato. Il piano inclinato forma un angolo θ=30° rispetto a un piano orizzontale. La sfera è lasciata libera di muoversi verso il basso e percorre una distanza L=2.0m parallelamente al piano inclinato prima di arrivare alla fine della discesa. Il momento di inerzia di una sfera per rotazione intorno al suo centro è dato da $I=(2/5)mR^2$.

1) Determinare la velocità che ha la sfera alla fine della discesa in assenza di qualsiasi forma di attrito.

2) Determinare il coefficiente di attrito minimo μ fra piano inclinato e sfera, affinché si abbia un moto di puro rotolamento.

3) Nel caso di moto di puro rotolamento, determinare la velocità di traslazione v che la sfera possiede alla fine della discesa.

[Si noti che tutti i risultati richiesti devono essere determinati numericamente, anche se massa m e raggio R non sono parametri noti].



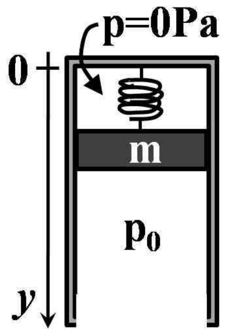
Problema 2

Sia dato un disco di massa m=20.0kg e sezione S=0.15m^2, all'interno di un recipiente cilindrico con sezione interna esattamente pari a S. Il disco è legato ad una delle basi del recipiente mediante una molla di costante elastica $k=2.0\cdot10^3$N/m e lunghezza a riposo l_0=1.5m, mentre in corrispondenza dell'altra base il recipiente è aperto (vedi figura). Inizialmente il disco comprime completamente la molla e si trova adiacente alla base del recipiente; il tutto è disposto verticalmente con l'apertura rivolta verso il basso (vedi figura). Ovunque nel recipiente e fuori di esso vi è una pressione pari a $p_0=1.0\cdot10^4$Pa. Il disco viene lasciato libero di muoversi verso il basso, e man mano che avanza lascia dietro di sè uno spazio vuoto nel recipiente con pressione nulla. Si trascuri qualsiasi forza dissipativa.

1) Determinare a che distanza y_0 dalla base del recipiente si trova la posizione di equilibrio del disco.

2) Dimostrare che il disco si muove di moto armonico e determinarne la pulsazione ω.

3) Determinare la velocità che possiede il disco quando raggiunge la posizione di equilibrio y_0.



Problema 3

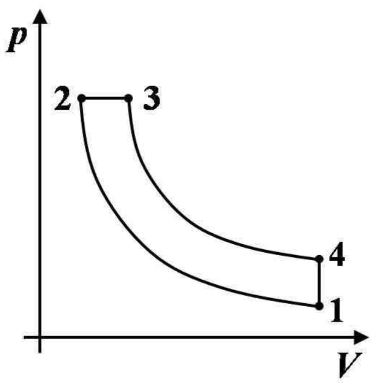
Il ciclo termodinamico di un motore diesel è costituito dalle quattro trasformazioni riportate in figura nel piano p,V. Si tratta di: *i)* una compressione adiabatica dallo stato 1 allo stato 2; *ii)* una espansione isobara dallo stato 2 allo stato 3, durante la quale il gas assorbe il calore della combustione; *iii)* una espansione adiabatica dallo stato 3 allo stato 4; *iv)* una trasformazione isocora dallo stato 4 allo stato 1, nella quale vengono espulsi i gas di scarico. Come per tutti i motori, anche per il motore diesel il rapporto volumetrico di compressione, R_V, è definito come il rapporto fra il volume massimo e il volume minimo del ciclo, quindi $R_V=V_1/V_2$. Inoltre si introduce il rapporto di volume della combustione, R_C (anche detto rapporto di *cut-off*), definito come il rapporto fra il volume finale e quello iniziale durante la fase di combustione, quindi $R_C=V_3/V_2$. Si supponga che tutte queste trasformazioni siano reversibili e che il gas che compie il ciclo sia un gas perfetto biatomico.

1) Dimostrare che il rendimento η del ciclo diesel è dato dalla seguente formula:

$$\eta = 1 - \frac{1}{R_V^{\gamma-1}}\left[\frac{R_C^{\gamma}-1}{\gamma(R_C-1)}\right]$$

dove $\gamma=C_P/C_V$ è il rapporto fra le capacità termiche a pressione e volume costante.

2) Dato un motore diesel con R_V=20, temperatura massima durante il ciclo pari a T_{MAX}=2000K e temperatura minima T_{min}=300K, determinare il rendimento del motore.



Soluzione problema 1

Punto 1): In assenza di qualsiasi forma di attrito la sfera scivola verso il basso strisciando sul piano inclinato e senza alcuna rotazione. Possiamo allora calcolare la velocità finale utilizzando la conservazione dell'energia. Sapendo che il corpo percorre una distanza *L* parallelamente al piano inclinato, il dislivello verticale sarà dato da *h*:

$$h = L\sin\theta$$

Ne segue che tutta l'energia potenziale legata alla forza di gravità sarà trasformata in energia cinetica alla fine della discesa:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL\sin\theta} \approx 4.4\text{m/s}$$

Punto 2): Scegliamo l'asse *x* parallelo al piano inclinato e positivo verso il basso. Per avere un moto di puro rotolamento devono essere verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\theta - F_{ATT} \\ I\alpha = R\cdot F_{ATT} \\ a_x = R\alpha \end{cases}$$

con α accelerazione angolare e a_x accelerazione traslazionale (del centro di massa) che è parallela all'asse *x*. La prima equazione è il II principio della dinamica applicato alla sfera sotto l'azione della forza di gravità e della forza di attrito F_{ATT}; la seconda equazione rappresenta l'analogo del II principio della dinamica per i moti rotatori, con $R\cdot F_{ATT}$ pari al momento delle forze calcolato rispetto al centro di massa della sfera; la terza equazione è la condizione di puro rotolamento. Sostituendo la terza equazione nella seconda si ha che:

$$\begin{cases} ma_x = mg\sin\theta - F_{ATT} \\ Ia_x = R^2 F_{ATT} \\ a_x = R\alpha \end{cases}$$

e sosituendo la seconda nella prima:

$$\begin{cases} m\dfrac{R^2 F_{ATT}}{I} = mg\sin\theta - F_{ATT} \\ Ia_x = R^2 F_{ATT} \\ \\ a_x = R\alpha \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo la forza di attrito F_{ATT}:

$$\frac{mR^2}{I}F_{ATT} = mg\sin\theta - F_{ATT}$$

$$\left(\frac{mR^2}{I} + 1\right)F_{ATT} = mg\sin\theta$$

$$\frac{mR^2 + I}{I} F_{ATT} = mg \sin\theta$$

$$F_{ATT} = \frac{I}{mR^2 + I} mg \sin\theta$$

Ma la forza di attrito statico che agisce nel caso di puro rotolamento sul punto di contatto fra sfera e piano inclinato è sempre minore o uguale a:

$$F_{ATT} \le \mu N$$

$$F_{ATT} \le \mu mg \cos\theta$$

dove N è la reazione normale del piano inclinato sulla sfera ed è pari alla componente normale della forza peso: $N = mg\cos\theta$. Combinando le due relazioni si ottiene che:

$$\frac{I}{mR^2 + I} mg \sin\theta \le \mu mg \cos\theta$$

$$\mu \ge \frac{I}{mR^2 + I} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\mu \ge \frac{2/5\, mR^2}{mR^2 + 2/5\, mR^2} \tan\theta$$

$$\mu \ge \frac{2}{7} \tan\theta \approx 0.16$$

Dall’ultima disuguglianza si evince che il coefficiente di attrito minimo per il moto di puro rotolamento è $\mu \approx 0.16$.

Punto 3): Nel caso di puro rotolamento, l’energia potenziale determinata al punto 1) viene trasformata completamente in energia cinetica di traslazione più energia cinetica rotazionale (si ricordi che nel moto di puro rotolamento l’attrito che agisce sul punto di contatto fra sfera e piano inclinato non compie lavoro):

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} mR^2 \left(\frac{v}{R} \right)^2$$

dove nell’ultimo passaggio si è sostituita l’espressione del momento di inerzia e si è imposta la condizione di puro rotolamento per la velocità angolare: $v = R\omega$. Dall’ultima equazione si ottiene che:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{5} mv^2$$

$$mgh = \frac{7}{10} mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = \sqrt{\frac{10}{7} gL \sin\theta} \approx 3.7\text{m/s}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Quando il disco viene lasciato libero di muoversi, esso è sottoposto alla forza peso (verso il basso), la spinta elastica della molla (inizialmente verso il basso), e la forza esercitata dalla pressione atmosferica (verso l'alto). Prendendo l'asse *y* orientato verso il basso come in figura e con lo zero coincidente con la posizione iniziale del disco (a ridosso della base superiore del recipiente), il II principio della dinamica si scrive come segue:

$$ma_y = mg - k(y - l_0) - p_0 S$$

Quando l'accelerazione a_y è nulla si ha la poszione di equilibrio y_0. Dalla precedente espressione si ottiene allora che:

$$mg - k(y_0 - l_0) - p_0 S = 0$$

$$k(y_0 - l_0) = mg - p_0 S$$

$$y_0 = l_0 + \frac{mg}{k} - \frac{p_0 S}{k} \approx 0.85\text{m}$$

Punto 2): Riarrangiando il II principio della dianmica scritto precedentemente, si ottiene che:

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k(y - l_0) - p_0 S$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}(y - l_0) - g + \frac{p_0 S}{m} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}(y - l_0 - \frac{mg}{k} + \frac{p_0 S}{k}) = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}\left[y - \left(l_0 + \frac{mg}{k} - \frac{p_0 S}{k}\right)\right] = 0$$

Nell'ultima formula si noti che il termine fra parentesi tonde è pari alla posizione di equilibrio y_0 determinata al punto 1), per cui si può scrivere che:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m}(y - y_0) = 0$$

Quest'ultima è l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega=(k/m)^{1/2}\approx 10.0\text{Hz}$.

Per riportarla alla forma tipica di un'equazione differenziale del II ordine per il moto armonico si facciano le seguenti sostituzioni:

$$y - y_0 = y'$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} \rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{k}{m} y' = 0$$

Ne segue che y' si muove di moto armonico con pulsazione $\omega=(k/m)^{1/2}$:

$$y'(t) = A\cos(\omega t)$$

$$y(t) - y_0 = A\cos(\omega t)$$

$$y(t) = y_0 + A\cos(\omega t)$$

Imponendo la condizione iniziale per cui y=0m per t=0sec, si ottiene l'ampiezza di oscillazione A:

$$0 = y_0 + A\cos(0) \rightarrow A = -y_0$$
$$y(t) = y_0 - y_0 \cos(\omega t)$$
$$y(t) = y_0 [1 - \cos(\omega t)]$$
$$y(t) = \left(l_0 + \frac{mg - p_0 S}{k} \right) \cdot [1 - \cos(\omega t)]$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito a y_0 l'espressione trovata al punto 1).

Punto 3): Per calcolare la velocità con cui il disco arriva nella posizione di equilibrio, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica in assenza di forze dissipative, tenendo a mente che anche la pressione p_0 compie lavoro (negativo) sul disco:

$$\Delta K + \Delta U = W_{ext}$$

dove ΔK e ΔU sono rispettivamente le variazioni di energia cinetica e potenziale, mentre W_{ext} è il lavoro fatto dalle forze esterne (ovvero non incluse nell'energia potenziale), che nel nostro caso è il lavoro della pressione p_0. Per l'enegia potenziale dobbiamo tenere conto sia della forza di gravità che della forza elastica, ricordando che la posizione di partenza è y=0 e quella di arrivo y=y_0:

$$\Delta U_g = -mgy_0$$

Per quanto riguarda il segno di ΔU_g che è la variazione di energia potenziale gravitazionale, si tenga presente che U_g è maggiore nella posizione di partenza che in quella di arrivo (perché il disco parte più in alto della posizione di arrivo y_0) e pertanto ΔU_g<0.
Per l'energia potenziale elastica, U_k, possiamo invece scrivere che:

$$\Delta U_k = \frac{1}{2} k (y_0 - l_0)^2 - \frac{1}{2} k (0 - l_0)^2$$
$$\Delta U_k = \frac{1}{2} k y_0^2 + \frac{1}{2} k l_0^2 - k y_0 l_0 - \frac{1}{2} k l_0^2$$
$$\Delta U_k = \frac{1}{2} k y_0^2 - k y_0 l_0$$
$$\Delta U_k = \frac{1}{2} k y_0 (y_0 - 2 l_0)$$

Ne segue che la variazione totale di energia potenziale è pari a:

$$\Delta U = \Delta U_g + \Delta U_k = -mgy_0 + \frac{1}{2} k y_0 (y_0 - 2 l_0)$$

Siccome il disco è inizialmente fermo, la variazione di energia cinetica è data semplicemente da:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2$$

Il lavoro fatto invece dalla pressione p_0 è pari a:

$$W_{ext} = p_0 S \Delta y = p_0 S (0 - y_0)$$
$$W_{ext} = -p_0 S y_0$$

che è negativo perché si tratta di lavoro subito dal gas a pressione p_0 (il gas spinge verso l'alto mentre il disco si muove verso il basso).

Combinando tutti questi risultati si ha che:

$$\Delta K + \Delta U = W_{ext}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgy_0 + \frac{1}{2}ky_0(y_0 - 2l_0) = -p_0 S y_0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy_0 - p_0 S y_0 - \frac{1}{2}ky_0(y_0 - 2l_0)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = ky_0\left[\frac{mg - p_0 S}{k} - \frac{1}{2}(y_0 - 2l_0)\right]$$

Dalla relazione per la posizione di equilibrio, y_0, trovata al punto 1) si ottiene che:

$$\frac{mg - p_0 S}{k} = y_0 - l_0$$

che sostituita nell'ultima relazione ci restituisce la seguente espressione:

$$\frac{1}{2}mv^2 = ky_0\left[y_0 - l_0 - \frac{1}{2}(y_0 - 2l_0)\right]$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = ky_0\left(y_0 - l_0 - \frac{1}{2}y_0 + l_0\right)$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ky_0^2$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}}y_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\left(l_0 + \frac{mg}{k} - \frac{p_0 S}{k}\right) \approx 8.5\text{m/s}$$

Si poteva arrivare all'ultimo risultato molto più semplicemente derivando rispetto al tempo l'espressione trovata per $y(t)$:

$$y(t) = y_0[1 - \cos(\omega t)]$$

$$v = \frac{dy}{dt} = y_0 \omega \sin(\omega t)$$

Poiché il disco arriva per la prima volta nella posizione di equilibrio quando $\omega t = \pi/2$ (cioè dopo ¼ di periodo), la velocità richiesta è data da:

$$v = y_0 \omega \sin(\pi/2) = y_0 \omega$$

$$v = \left(l_0 + \frac{mg}{k} - \frac{p_0 S}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 8.5\text{m/s}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Per qualsiasi ciclo termodinamico possiamo scrivere che il rendimento è dato da:

$$\mu = 1 - \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}}$$

dove Q_{CED} e Q_{ASS} sono rispettivamente i moduli del calore ceduto e assorbito durante il ciclo.

Nel presente caso abbiamo la trasformazione da 1 a 2 che è adiabatica, pertanto il calore scambiato durante questa trasformazione è nullo:

$$Q_{12} = 0$$

La trasformazione da 2 a 3 è un'isobara, per cui si ha calore scambiato a pressione costante:

$$Q_{23} = C_P\left(T_3 - T_2\right) > 0$$

che è positivo (perché $T_3 > T_2$) ed è pertanto calore assorbito.

La trasformazione da 3 a 4 è di nuovo un'adiabatica, per cui si ha scambio di calore nullo:

$$Q_{34} = 0$$

Infine la trasformazione da 4 a 1 è un'isocora, per cui si calore scambiato a volume costante:

$$Q_{41} = C_V\left(T_1 - T_4\right) < 0$$

che è negativo (perché $T_1 < T_4$) ed è pertanto calore ceduto.

Prendendo i moduli di calore ceduto e assorbito e sostituendoli nella formula per il rendimento, si ottiene che:

$$\mu = 1 - \frac{\left|Q_{41}\right|}{Q_{23}}$$

$$\mu = 1 - \frac{C_V\left(T_4 - T_1\right)}{C_P\left(T_3 - T_2\right)}$$

Per avere questa formula in funzione dei volumi, e quindi di R_V e R_C, consideriamo che lo stato 1 e 2 sono legati da un'adiabatica, come anche lo stato 4 e lo stato 3; possiamo allora scrivere le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} T_4 V_4^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro si ottiene che:

$$\frac{T_4 V_4^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_3 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_2^{\gamma-1}}$$

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

perché $V_1 = V_4$.

Consideriamo inoltre l'espansione isobara da 2 a 3, per la quale si ha che:

$$V_3 = V_2 \frac{T_3}{T_2}$$

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione trovata per $T4/T1$ si ottiene che:

$$\frac{T_4}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma}$$

Riarrangiando la formula per il rendimento si ha che:

$$\mu = 1 - \frac{C_V\left(\frac{T_4}{T_1} - 1\right)T_1}{C_P\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right)T_2}$$

$$\mu = 1 - \frac{(T_4/T_1 - 1)}{\gamma(T_3/T_2 - 1)}\frac{T_1}{T_2}$$

Sostituendo in questa espressione l'ultimo risutato trovato per $T4/T1$ e la formula di T_3/T_2 ottenuta dall'isobara, si arriva alla seguente:

$$\mu = 1 - \frac{\left[(V_3/V_2)^{\gamma} - 1\right]}{\gamma\left[V_3/V_2 - 1\right]}\frac{T_1}{T_2}$$

Dato che fra lo stato 1 e lo stato 2 abbiamo un'adiabatica, per la quale vale che:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$$

otteniamo per il rendimento la seguente espressione:

$$\mu = 1 - \frac{\left[(V_3/V_2)^{\gamma} - 1\right]}{\gamma\left[V_3/V_2 - 1\right]}\frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{R_V^{\gamma-1}}\left[\frac{R_C^{\gamma} - 1}{\gamma(R_C - 1)}\right]$$

Punto 2): Noto il valore di R_V=20, per determinare il rendimento del ciclo con la precedente formula è necessario conoscere $R_C=V_3/V_2$. Il problema fornisce però la temperatura massima T_{MAX} e quella minima T_{min}. Queste due temperature coincidono rispettivamente con T_3 (=T_{MAX}) e T_1 (=T_{min}). Dall'espressione dell'isobara abbiamo che:

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{T_3}{T_2}$$

Inoltre per l'adiabatica fra lo stato 1 e lo stato 2 abbiamo che:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = R_V^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1R_V^{\gamma-1}$$

Sostituendo questa espressione in quella precedente per V_3/V_2, si ha che:

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{T_3}{T_1 R_V^{\gamma-1}}$$

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{T_{MAX}}{T_{\min}}\frac{1}{R_V^{\gamma-1}}$$

$$R_C=\frac{T_{MAX}}{T_{\min}}\frac{1}{R_V^{\gamma-1}}\approx 2.0$$

Sostituendo i valori di R_C e R_V nella formula del rendimento e tenendo conto che per un gas biatomico γ=1.4, si ottiene che:

$$\mu=1-\frac{1}{R_V^{\gamma-1}}\left[\frac{R_C^{\gamma}-1}{\gamma(R_C-1)}\right]\approx 0.65$$