**Risultati esame scritto Fisica 1 - 05/07/2016**
**orali: 12-07-2016 alle ore 10.30 presso aula C**

**gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale**

| matricola | voto | |
|---|---|---|
| 120819* | 14 | |
| 118461 | 10 | |
| 118527 | nc | |
| 114952 | nc | |
| 118505 | nc | |
| 114872 | 17 | ammesso |
| 118554 | 14 | |
| 114925 | 13 | |
| 207890 | 15 | |
| 207462 | 10 | |
| 119844 | nc | |
| 207478 | 13 | |
| 207328 | 21 | ammesso |
| 120823* | 11 | |
| 118490* | 11 | |

nc=non classificato

# Esame di Fisica 1

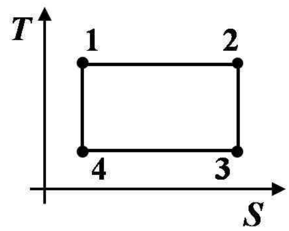
**Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 05/07/2016**

**Problema 1**

Sia dato un ciclo di Carnot reversibile operante fra la temperatura massima $T_{MAX}=T_1$ e la temperatura minima $T_{MIN}=T_3$. Se ne consideri la rappresentazione non nel piano $p,V$, ma nel piano $T,S$ (temperatura $T$ contro entropia $S$) riportata in figura. Si ha prima una trasformazione isoterma dallo stato 1 allo stato 2 a temperatura costante, $T_1=T_2$, e entropia che aumenta da $S_1$ a $S_2$; poi una trasformazione adiabatica dallo stato 2 allo stato 3 con la temperatura che scende da $T_1$ a $T_3$ mentre l'entropia è costante, $S_2=S_3$; quindi segue un'altra isoterma dallo stato 3 allo stato 4 a temperatura costante, $T_3=T_4$, ma con entropia che diminuisce da $S_3$ a $S_4$; infine il ciclo si chiude con una trasformazione adiabatica dallo stato 4 allo stato 1, con temperatura che sale da $T_4$ a $T_1$ e entropia costante, $S_4=S_1$.

Senza utilizzare le grandezze pressione $p$ e volume $V$, si dimostri che il rendimento $\mu$ del ciclo di Carnot è pari a:

$$\mu = 1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}}$$ [nel piano $T,S$ si ha che $TdS=dQ$ per trasformazioni reversibili]




**Problema 2**

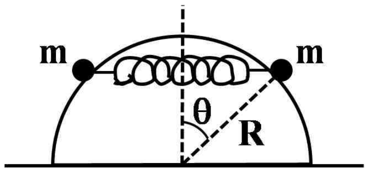
Su un piano orizzontale è poggiata una guida a forma di calotta sferica di raggio $R$=0.25m, sulla cui sommità sono posti due corpi puntiformi di massa $m$=10.0kg ciascuno. I due corpi sono legati fra loro da una molla di massa trascurabile, con costante elastica $k$=400N/m e lunghezza a riposo nulla. Una fessura nella guida permette alla molla di scendere al suo interno quando i due corpi si muovono verso il basso (vedi figura). I due corpi scivolano sulla calotta sferica senza attrito e lungo la direzione verticale si muovono in maniera solidale, ovvero la quota del primo corpo è sempre uguale a quella del secondo corpo (ciò significa che i due corpi sono sempre allineati orizzontalmente, come riportato in figura).

1) Determinare per quale valore di $\theta=\theta_{eq}$ si ha una posizione di equilibrio (oltre a $\theta$=0°), e qual è il modulo della reazione vincolare normale $N$ in tale posizione.

2) Determinare l'espressione dell'energia potenziale $U$ in funzione dell'angolo $\theta$, $U=U(\theta)$, e valutarne il valore per $\theta$=0° e per $\theta=\theta_{eq}$.

3) Se i due corpi si trovano inizialmente sulla sommità della guida e hanno entrambi velocità iniziale pari a $v_0$=1.0m/s in direzione orizzontale, uno verso destra e l'altro verso sinistra, determinare l'angolo $\theta$ massimo raggiunto dai due corpi.

4) Nella situazione del punto 3), determinare la velocità iniziale $v_0$ minima affinché i due corpi raggiungano la posizione di equilibrio $\theta_{eq}$ determinata al punto 1).




**Problema 3**

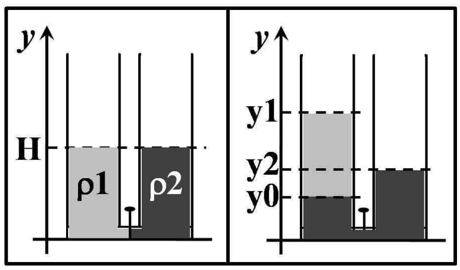
Sia dato un tubo ad U disposto nel piano verticale, come rappresentato in figura, i cui rami di uguale sezione $S$=0.5m$^2$ sono entrambi aperti in alto e a contatto con la pressione atmosferica. In basso i due rami sono raccordati mediante un tubo molto corto e di sezione molto piccola rispetto a $S$, cosicché il volume di liquido contenuto in tale raccordo è trascurabile rispetto a quello presente nei rami. In tale raccordo è inoltre presente una valvola inizialmente chiusa (figura a sinistra), che separa quindi i liquidi nei due rami. Nel ramo di sinistra è stato versato olio con densità $\rho_1$=850kg/m$^3$, mentre nel ramo di destra è stata versata acqua con densità $\rho_2$=1000kg/m$^3$. In entrambi i rami il liquido è stato versato fino ad un'altezza $H$=2.0m.

Dopo l'apertura della valvola, acqua e olio non si mescolano (liquidi immiscibili fra loro) e si va verso una situazione di equilibrio rappresentata nella figura di destra. Si assuma che i due liquidi siano incomprimibili e che sia assente qualsiasi forza dissipativa.

1) Determinare i livelli $y_2$, $y_1$ e $y_0$ riportati nella figura di destra quando i due liquidi sono all'equilibrio.

2) Determinare la differenza di energia potenziale fra la situazione della figura a sinistra e quella della figura a destra.

3) Calcolare con che velocità si muovono i 2 liquidi quando arrivano nella posizione di equilibrio.



**Soluzione problema 1**

Punto 1): Il rendimento di un ciclo termodinamico è dato da:

$$\mu = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}}$$

dove $Q_{CED}$ e $Q_{ASS}$ sono rispettivamente il calore ceduto e assorbito durante il ciclo. Per la trasformazione dallo stato 1 allo stato 2 si ha il seguente calore scambiato $Q_{12}$:

$$Q_{12} = \int_1^2 T_1 dS = T_{MAX}(S_2 - S_1) > 0$$

dove la temperatura è stata portata fuori dall'integrale perché si tratta di un'isoterma, e inoltre nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che $T_1=T_{MAX}$. Si noti infine che $Q_{12}>0$ perché $S_2>S_1$ e quindi si tratta di calore assorbito.

Per la trasformazione da 2 a 3 si ha che il calore scambiato $Q_{23}=0$ perché si tratta di un'adiabatica. Nell'isoterma da 3 a 4 si ha che:

$$Q_{34} = \int_3^4 T_3 dS = T_{MIN}(S_4 - S_3) < 0$$

dove si è fatto uso del fatto che $T_3=T_{MIN}$; si noti inoltre che $Q_{34}<0$ perché $S_4<S_3$ e quindi si tratta di calore ceduto. Nell'ultima trasformazione si ha che $Q_{41}=0$ perché si tratta nuovamente di un'adiabatica.

Applicando la prima formula scritta per il rendimento si ha che:

$$\mu = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}}$$

$$\mu = 1 - \frac{|T_{MIN}(S_4 - S_3)|}{T_{MAX}(S_2 - S_1)}$$

$$\mu = 1 - \frac{T_{MIN}(S_3 - S_4)}{T_{MAX}(S_2 - S_1)}$$

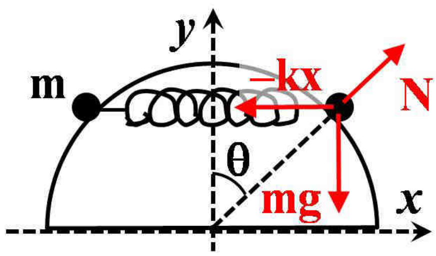
$$\mu = 1 - \frac{T_{MIN}}{T_{MAX}}$$

che è il risultato cercato. Nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che $S_3–S_4=S_2–S_1$ (come si vede dal ciclo riportato nella figura del problema).

**Soluzione problema 2**

Punto 1): Si scelga un sistema di riferimento $x,y$ come quello rappresentato in figura. Sui due corpi puntiformi agiscono la forza peso $mg$ (verticale e diretta verso il basso), la forza elastica $F_k=-k\Delta x$ (orizzontale e diretta verso l'interno della calotta), e la reazione vincolare normale $N$ della calotta sulle masse $m$ (perpendicolare alla calotta e diretta verso il suo esterno). Per una posizione generica $\theta$ scriviamo il II principio della dinamica per uno dei due punti materiali (quello a destra), scomposto lungo gli assi $x$ e $y$:

$$\begin{cases} ma_x = -k(2R\sin\theta) + N\sin\theta \\ ma_y = -mg + N\cos\theta \end{cases}$$




dove si è fatto uso dell'uguaglianza $x=R\sin\theta$ e si è tenuto conto del fatto che la deformazione della molla $\Delta x=2\cdot x$ (nella figura vedere la posizione della massa $m$ a destra).

Imponendo la condizione di equilibrio, ovvero $a_x$=0=$a_y$, si ottiene che:

$$\begin{cases} 0 = -k(2R\sin\theta) + N\sin\theta \\ 0 = -mg + N\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} N\sin\theta = 2kR\sin\theta \\ N\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 2kR \\ N\cos\theta = mg \end{cases}$$

Facendo il rapporto membro a membro nell'ultimo sistema:

$$\cos\theta_{eq} = \frac{mg}{2kR}$$

$$\theta_{eq} = \arccos\left(\frac{mg}{2kR}\right) \approx 60.7°$$

Per tale posizione si ha che il modulo della reazione vincolare $N$ è dato da:

$$N\cos\theta_{eq} = mg$$

$$N = \frac{mg}{\cos\theta_{eq}} = \frac{mg}{mg/2kR}$$

$$N = 2kR = 200\mathrm{N}$$

Punto 2): Per una generica posizione $\theta$ sono presenti energia potenziale legata alla forza di gravità e energia potenziale elastica. L'energia potenziale totale sarà allora:

$$U(x,y) = 2\cdot mgy + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$$U(x,y) = 2\cdot mgy + \frac{1}{2}k(2x)^2$$

dove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del fatto che la deformazione della molla $\Delta x$ è pari al doppio della coordinata $x$ di una delle due masse. Invece il coefficiente 2 di fronte all'energia potenziale gravitazionale tiene conto del fatto che l'energia totale è data da 2 masse puntiformi. Sostituendo a $x$ e $y$ le espressioni in termini di $\theta$ ($x=R\sin\theta$ e $y=R\cos\theta$) si ottiene la seguente espressione:

$$U(\theta) = 2mg(R\cos\theta) + \frac{1}{2}k(2R\sin\theta)^2$$

$$U(\theta) = 2mgR\cos\theta + 2kR^2\sin^2\theta$$

$$U(\theta) = 2mgR\cos\theta + 2kR^2(1-\cos^2\theta)$$

Per $\theta$=0 e $\theta=\theta_{eq}$ si hanno rispettivamente i seguenti valori di energia potenziale $U$:

$$U(0) = 2mgR = 49\text{J}$$

$$U(\theta_{eq}) = 2mgR\frac{mg}{2kR} + 2kR^2\left[1 - \left(\frac{mg}{2kR}\right)^2\right]$$

$$U(\theta_{eq}) = \frac{m^2g^2}{k} + \left(2kR^2 - \frac{m^2g^2}{2k}\right)$$

$$U(\theta_{eq}) = \frac{m^2g^2}{2k} + 2kR^2 \approx 62\text{J}$$

Dato che nella posizione $\theta_{eq}$ l'energia potenziale è maggiore che in $\theta$=0, ne segue che la posizione $\theta_{eq}$ corrisponde a un equilibrio instabile.

Punto 3): Se i due corpi hanno inizialmente velocità $v_0$, ne segue che l'energia cinetica iniziale $K_i$ è pari a:

$$K_i = 2 \cdot \frac{1}{2}mv_0^2$$

mentre l'energia potenziale iniziale $U_i$ è tutta energia gravitazionale:

$$U_i = 2 \cdot mgR$$

L'energia totale iniziale è quindi pari a:

$$E_i = K_i + U_i$$

$$E_i = mv_0^2 + 2mgR$$

L'energia cinetica posseduta inizialmente verrà convertita in energia potenziale, e si raggiunge la posizione $\theta$ massimo quando l'energia cinetica sarà nulla. Nella posizione finale abbiamo allora solo energia potenziale, che è quella trovata al punto 2), e l'energia finale $E_f$ sarà allora:

$$E_f = U(\theta) = 2mgR\cos\theta + 2kR^2(1 - \cos^2\theta)$$

Dato che non ci sono forze dissipative possiamo applicare la conservazione dell'energia:

$$E_i = E_f$$

$$mv_0^2 + 2mgR = 2mgR\cos\theta + 2kR^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$2kR^2\cos^2\theta - 2mgR\cos\theta + mv_0^2 + 2mgR - 2kR^2 = 0$$

$$\cos^2\theta - \frac{mg}{kR}\cos\theta + \left(\frac{mg}{kR} + \frac{mv_0^2}{2kR^2} - 1\right) = 0$$

L'ultima espressione scritta è un'equazione di II grado per cos$\theta$, la cui soluzione ci porta a:

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{mg}{2kR} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{2kR}\right)^2 - \left(\frac{mv_0^2}{2kR^2} + \frac{mg}{kR} - 1\right)}$$

$$\cos\theta_{1,2} \approx 0.49 \pm 0.25$$

$$\cos\theta_1 \approx 0.49 + 0.25 = 0.74 \rightarrow \theta_1 \approx 42.3°$$

$$\cos\theta_2 \approx 0.49 - 0.25 = 0.24 \rightarrow \theta_2 \approx 76.1°$$

Delle due soluzioni trovate solo la prima è accettabile. La seconda posizione trovata, essendo maggiore dell'angolo $\theta_{eq}$ (≈60.7°) ottenuto al punto 1), può essere raggiunta solo se l'energia iniziale $E_i$ è maggiore dell'energia potenziale $U(\theta_{eq})$=62J trovata al punto 2.

Punto 4): Nella posizione finale $\theta_{eq}$ il valore dell'energia potenziale è pari a:

$$U(\theta_{eq}) = \frac{m^2 g^2}{2k} + 2kR^2 \approx 62\mathrm{J}$$

come determinata al punto 2). Per poter arrivare alla posizione $\theta_{eq}$ è allora necessario avere un'energia iniziale almeno pari a $U(\theta_{eq})$. Come prima l'energia iniziale $E_i$ è data da:

$$E_i = mv_0^2 + 2mgR$$

Applicando la conservazione dell'energia si ottiene che:

$$E_i = U(\theta_{eq})$$

$$mv_0^2 + 2mgR = \frac{m^2 g^2}{2k} + 2kR^2$$

$$v_0^2 = \frac{mg^2}{2k} + \frac{2kR^2}{m} - 2gR$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{mg^2}{2k} + \frac{2kR^2}{m} - 2gR} \approx 1.14\mathrm{m/s}$$

**Soluzione problema 3**

Punto 1): Dopo aver aperta la valvola, il liquido con densità maggiore (acqua con $\rho_2$=1000kg/m$^3$) spinge in alto quello con densità minore (olio con $\rho_1$=850kg/m$^3$), per la legge di Stevino. Detti $y_1$ e $y_2$ rispettivamente il livello dell'olio e quello dell'acqua nei rispettivi rami, mentre $y_0$ è il livello raggiunto dall'acqua nel ramo dell'olio (come rappresentato nella figura di destra), l'equilibrio fra i due rami si impone uguagliando le pressioni sul fondo del tubo a U. In fondo al primo ramo abbiamo la pressione $p_1$, che per la legge di Stevino è data da:

$$p_1 = p_0 + \rho_1 g(y_1 - y_0) + \rho_2 g y_0$$

dove $p_0$ è la pressione atmosferica.
Per l'altro ramo abbiamo invece che:

$$p_2 = p_0 + \rho_2 g y_2$$

All'equilibrio si deve avere che $p_1$=$p_2$, da cui segue che:

$$p_0 + \rho_1 g(y_1 - y_0) + \rho_2 g y_0 = p_0 + \rho_2 g y_2$$

$$\rho_1 g(y_1 - y_0) = \rho_2 g(y_2 - y_0)$$

$$\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Dato che abbiamo tre incognite ($y_2$, $y_1$, $y_0$) da determinare, all'ultima equazione dobbiamo aggiungerne altre due per avere un sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Le altre due condizioni da imporre sono dovute all'incompressibilità dei liquidi e al fatto che il volume nel tubo di raccordo è trascurabile. Queste due ipotesi hanno come conseguenza che il volume totale dell'acqua nei due rami è lo stesso prima e dopo l'apertura della valvola, e lo stesso vale per l'olio. Il volume totale di olio prima dell'apertura della valvola, $V_1$, è pari a:

$$V_1 = SH$$

mentre il volume dell'olio all'equilibrio dopo l'apertura della valvola è ancora $V_1$, ma è pari a:

$$V_1 = S(y_1 - y_0)$$

Uguagliando le due espressioni si ha che:

$$y_1 - y_0 = H$$

Analogo discorso per l'acqua; prima dell'apertura della valvola il volume $V_2$ di acqua è pari a:

$$V_2 = SH$$

mentre all'equilibrio dopo l'apertura del rubinetto si ha che:

$$V_2 = Sy_2 + Sy_0$$

Uguagliando si ottiene che:

$$y_2 + y_0 = H$$

Abbiamo allora il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \\ y_1 - y_0 = H \\ y_2 + y_0 = H \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{H}{y_2 - y_0} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \\ y_1 - y_0 = H \\ y_2 = H - y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{H}{H - 2y_0} = \dfrac{\rho_2}{\rho_1} \\ y_1 = H + y_0 \\ y_2 = H - y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho_1}{\rho_2} H = H - 2y_0 \\ y_1 = H + y_0 \\ y_2 = H - y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{H}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \dfrac{H}{2\rho_2}(\rho_2 - \rho_1) \\ y_1 = H + \dfrac{H}{2\rho_2}(\rho_2 - \rho_1) \\ y_2 = H - \dfrac{H}{2\rho_2}(\rho_2 - \rho_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{H}{2\rho_2}(\rho_2 - \rho_1) = 0.15\text{m} \\ y_1 = \dfrac{H}{2\rho_2}(3\rho_2 - \rho_1) = 2.15\text{m} \\ y_2 = \dfrac{H}{2\rho_2}(\rho_2 + \rho_1) = 1.85\text{m} \end{cases}$$

Punto 2): L'enegia potenziale dei due liquidi è esclusivamente energia potenziale legata alla forza di gravità. Come sappiamo in prossimità della superficie terrestre tale energia potenziale è pari a:

$$U = mgy$$

dove $m$ è la massa del corpo, $g$ è l'accelerazione di gravità ($\approx 9.8\text{m/s}^2$), e $y$ è la quota a cui si trova il corpo. Nel caso di corpi estesi, come sono le colonne di liquido in questione, la forza di gravità è applicata al centro di massa del corpo e quindi la quota $y$ della precedente formula coincide con la quota del centro di massa. Prima dell'apertura del rubinetto,

entrambe le colonne di liquido hanno un'altezza pari a $H$ e, data la simmetria cilindrica dei singoli rami del tubo ad U, il centro di massa di ciascuna colonna si trova ad un'altezza pari alla metà, ovvero $H/2$.
Inoltre la massa di liquido $m_j$ ($j$=1 per l'olio e $j$=2 per l'acqua) è pari a:

$$m_j = \rho_j V_j = \rho_j SH$$

Combinando quest'ultima espressione con la quota del centro di massa $y=H/2$, si hanno le seguenti espressioni per l'energia potenziale dell'olio $U_1$ e dell'acqua $U_2$ prima dell'apertura della valvola:

$$U_1 = \rho_1 SHg\frac{H}{2} = \frac{gS}{2}\rho_1 H^2$$

$$U_2 = \rho_2 SHg\frac{H}{2} = \frac{gS}{2}\rho_2 H^2$$

Ne segue che l'energia potenziale totale prima dell'apertura del rubinetto è pari a:

$$U_{TOT}^i = U_1 + U_2 = \frac{gS}{2}\rho_1 H^2 + \frac{gS}{2}\rho_2 H^2$$

$$U_{TOT}^i = \frac{gS}{2} H^2 (\rho_1 + \rho_2)$$

Nella situazione di equilibrio dopo l'apertura del rubinetto, abbiamo invece che:

$$U_1 = \rho_1 SHg\frac{y_1 + y_0}{2} = \frac{Sg}{2}\rho_1 H(y_1 + y_0)$$

$$U_2 = \rho_2 Sy_2 g\frac{y_2}{2} + \rho_2 Sy_0 g\frac{y_0}{2} = \frac{Sg}{2}\rho_2 \left(y_2^2 + y_0^2\right)$$

dove nella seconda espressione abbiamo considerato l'acqua distribuita su due colonne, una di altezza $y_2$ (ramo a destra) e l'altra di altezza $y_0$ (ramo a sinistra). Sostituendo alle ultime espressioni i valori numerici trovati per $y_2$, $y_1$, $y_0$ si può subito sapere qual è il valore di $U_1$ e $U_2$, e quindi di $U^f_{TOT}$; facendo poi la differenza con $U^i_{TOT}$ si arriva al risultato richiesto dal problema per il punto 2).
Qui nel seguito invece usiamo le espressioni algebriche (e non numeriche) per $y_2$, $y_1$, $y_0$ alla ricerca di un'espressione generale per la differenza di energia potenziale (il procedimento che ne segue risulta però più lungo e laborioso).
Sostituendo le espressioni prima trovate per $y_2$, $y_1$, $y_0$ si ha per $U_1$ che:

$$U_1 = \frac{Sg}{2}\rho_1 H\left[\frac{H}{2\rho_2}(3\rho_2 - \rho_1) + \frac{H}{2\rho_2}(\rho_2 - \rho_1)\right]$$

$$U_1 = \frac{Sg}{2}\rho_1 H\frac{H}{2\rho_2}[3\rho_2 - \rho_1 + \rho_2 - \rho_1]$$

$$U_1 = \frac{Sg}{2}\rho_1 H\frac{H}{2\rho_2}[4\rho_2 - 2\rho_1]$$

$$U_1 = \frac{Sg}{2} H^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}(2\rho_2 - \rho_1)$$

Per $U_2$ si ottiene invece che:

$$U_2 = \frac{Sg}{2}\rho_2\left[\frac{H^2}{4\rho_2^2}(\rho_2+\rho_1)^2 + \frac{H^2}{4\rho_2^2}(\rho_2-\rho_1)^2\right]$$

$$U_2 = \frac{Sg}{2}\rho_2\frac{H^2}{4\rho_2^2}\left[\rho_2^2+\rho_1^2+2\rho_2\rho_1+\rho_2^2+\rho_1^2-2\rho_2\rho_1\right]$$

$$U_2 = \frac{Sg}{2}\rho_2\frac{H^2}{2\rho_2^2}\left[\rho_2^2+\rho_1^2\right]$$

$$U_2 = \frac{Sg}{2}H^2\frac{\rho_2^2+\rho_1^2}{2\rho_2}$$

Sommando le due espressioni ottenute si arriva all’energia potenziale totale nella situazione di equilibrio:

$$U_{TOT}^f = U_1 + U_2$$

$$U_{TOT}^f = \frac{Sg}{2}H^2\frac{\rho_1}{\rho_2}(2\rho_2-\rho_1) + \frac{Sg}{2}H^2\frac{\rho_2^2+\rho_1^2}{2\rho_2}$$

$$U_{TOT}^f = \frac{Sg}{2}H^2\frac{\left[2\rho_1(2\rho_2-\rho_1)+\rho_2^2+\rho_1^2\right]}{2\rho_2}$$

$$U_{TOT}^f = \frac{gS}{2}H^2\frac{\rho_2^2-\rho_1^2+4\rho_2\rho_1}{2\rho_2}$$

La differenza di energia potenziale fra la situazione iniziale e finale sarà data da:

$$-\Delta U = U_{TOT}^i - U_{TOT}^f =$$

$$-\Delta U = \frac{gS}{2}H^2(\rho_1+\rho_2) - \frac{gS}{2}H^2\frac{\rho_2^2-\rho_1^2+4\rho_2\rho_1}{2\rho_2}$$

$$-\Delta U = \frac{gS}{2}H^2\left[\rho_1+\rho_2-\frac{\rho_2^2-\rho_1^2+4\rho_2\rho_1}{2\rho_2}\right]$$

$$-\Delta U = \frac{gS}{2}H^2\left[\frac{2\rho_2\rho_1+2\rho_2^2-\rho_2^2+\rho_1^2-4\rho_2\rho_1}{2\rho_2}\right]$$

$$-\Delta U = \frac{gS}{2}H^2\left[\frac{\rho_2^2+\rho_1^2-2\rho_2\rho_1}{2\rho_2}\right]$$

$$-\Delta U = \frac{gS}{4}H^2\frac{(\rho_2-\rho_1)^2}{\rho_2} = 110.25\text{J}$$

Punto 3): La differenza di energia potenziale calcolata al punto 2) viene tutta convertita in energia cinetica, data l’assenza di forze dissipative. Per l’energia cinetica l’espressione generale è la seguente:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Come prima per l’energia potenziale, qui abbiamo due colonne di liquido che si muovono in maniera compatta una dietro l’altra, per la loro incompressibilità. Quindi in qualsiasi istante la portata $S \cdot v$ deve essere uguale attraverso tutti e due i rami del tubo, e dato che la sezione $S$ è la stessa in entrambi, ne segue che le velocità con cui si muovono acqua e olio sono identiche (eccetto per il tubo di raccordo in basso che però contiene un volume di liquido trascurabile).
Le energie cinetiche di olio e acqua saranno allora date da:

$$K_1 = \frac{1}{2} \rho_1 S H v^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \rho_2 S H v^2$$

da cui segue che l’energia cinetica totale sarà pari a:

$$K_{TOT} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) S H v^2$$

Dato che inizialmente i due liquidi sono fermi si ha che l’energia cinetica inziale (prima dell’apertura della valvola) è pari a zero; la conservazione dell’energia si scrive allora come segue:

$$K_{TOT} = -\Delta U$$

$$\frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) S H v^2 = \frac{gS}{4} H^2 \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2}$$

$$v^2 = \frac{gH}{2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2 (\rho_1 + \rho_2)}$$

$$v = \sqrt{\frac{gH}{2} \frac{(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2 (\rho_1 + \rho_2)}} \approx 0.34 \mathrm{m/s}$$