Risultati esame scritto Fisica 1 - 05/09/2016
orali: 09/09/2016 alle ore 10.30 presso aula H

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

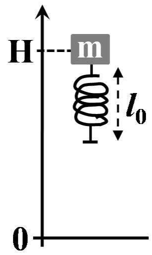
matricola	voto	
118563	23	ammesso
118461	11	
114892	nc	
115162	14	
114952	13	
114930	17	ammesso
118463	18	ammesso
114925	10	
207890	13	
207248	17	ammesso
207795	19	ammesso
118494	nc	
207667	17	ammesso
118490	17	ammesso
207650	nc	

nc=non classificato

Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 05/09/2016

Problema 1



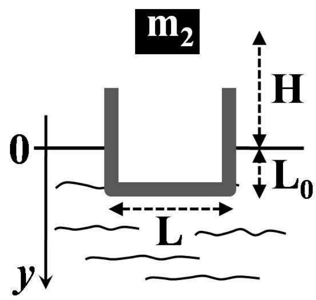
Sia dato un corpo puntiforme di massa m che si trova inizialmente in quiete ad un'altezza H=1.0m dal suolo. Sotto il corpo è agganciata una molla di massa trascurabile (vedi figura), con costante elastica $k=2.0\cdot10^3$N/m e lunghezza a riposo l_0=0.25m. Il corpo viene lasciato cadere verticalmente sotto l'azione dell'accelerazione di gravità g. In assenza di qualsiasi forza dissipativa si determini:

1) il valore della massa m affinché il corpo tocchi il suolo con velocità v=2.0m/s

2) il valore della massa m affinché la compressione massima della molla sia $\Delta l=l_0/2$

Problema 2

Una scatola cubica di lato L=0.8m galleggia in un bacino molto esteso di acqua (densità dell'acqua: $\rho_{H2O}=1.0\cdot10^3$kg/m^3). Essa ha una massa m_1=250kg e pareti con spessore trascurabile, e si trova inizialmente in quiete e all'equilibrio ad una profondità L_0 dalla superficie dell'acqua (come riportato in figura). Un corpo di dimensioni trascurabili e massa m_2=60.0kg parte con velocità nulla da un'altezza H=1.0m dalla superficie dell'acqua e viene lasciato cadere all'interno della scatola. Ne segue un urto perfettamente anelastico. Siano trascurabili tutti gli attriti e le forze dissipative.



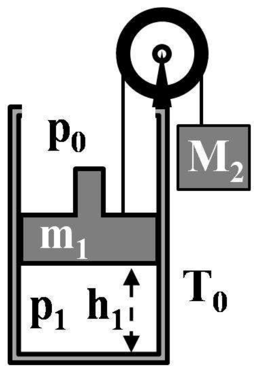
1) Calcolare la profondità iniziale L_0 a cui si trova la scatola, e la velocità v_0 che essa possiede subito dopo l'urto

2) Determinare l'espressione dell'accelerazione $a=a(y)$ in funzione della profondità y (vedi figura per l'asse y) con cui si muove la scatola dopo l'urto, e la sua pulsazione ω

3) Sapendo che la scatola dopo l'urto raggiunge una profondità massima y_{MAX}=0.72m, determinare l'ampiezza A del suo moto di oscillazione

Problema 3

Un recipiente cilindrico di sezione A=0.01m^2 è disposto verticalmente con l'apertura verso l'alto, e possiede pareti rigide e conduttrici di calore. Il recipiente contiene n moli di gas perfetto monoatomico ed è chiuso mediante un pistone di massa m_1=3.0kg che si può muovere senza attrito lungo le pareti del cilindro. Il pistone m_1 è collegato mediante una fune inenstensibile e una carrucola ad un corpo di massa M_2=60.0kg al di fuori del cilindro, come rappresentato in figura; sia la fune che la carrucola hanno massa trascurabile. La pressione atmosferica esterna al recipiente è $p_0=1.0\cdot10^5$Pa e tutto il sistema è immerso in un serbatoio termico a temperatura T_0=300K. Inizialmente il pistone è mantenuto in quiete ad un'altezza h_1=0.5m, la pressione interna al recipiente è $p_1=0.5\cdot10^5$Pa e la temperatura del gas è pari alla temperatura esterna T_0=300K. Dopo aver lasciato il pistone m_1 libero di muoversi e supponendo che la trasformazione del gas sia isoterma reversibile, si determini:



1) l'accelerazione iniziale a delle masse m_1 e M_2, e la tensione T presente nella fune

2) la variazione di entropia del gas, ΔS, fra la posizione iniziale del pistone m_1 e la sua posizione di equilibrio

3) la velocità v con cui il pistone m_1 arriva nella sua posizione di equilibrio

[La costante dei gas perfetti è R=8.31J/K·mol]

Soluzione problema 1

Punto 1): Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica in assenza di qualsiasi forza dissipativa. L'energia iniziale E_i è tutta energia potenziale gravitazionale, U_{g0}, poiché il corpo m è inizialmente in quiete e la molla non è deformata:

$$E_i = U_{g0} = mgH$$

Alla fine il corpo arriva al suolo con velocità v, comprimendo completamente la molla. Quindi l'energia finale E_f è data dalla somma dell'energia potenziale elastica U_k (dovuta alla compressione totale della molla) con l'energia cinetica K:

$$E_f = U_k + K$$

$$E_f = \frac{1}{2}kl_0^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Uguagliando E_i con E_f otteniamo un'equazione per determinare la massa m:

$$E_i = E_f$$

$$mgH = \frac{1}{2}kl_0^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

$$m\left(2gH - v^2\right) = kl_0^2$$

$$m = \frac{kl_0^2}{2gH - v^2} \approx 8.0\text{kg}$$

Punto 2): Applichiamo di nuovo la conservazione dell'energia meccanica, e come prima l'energia iniziale E_i è tutta energia potenziale gravitazionale, U_{g0}:

$$E_i = U_{g0} = mgH$$

Alla fine invece il corpo non arriva al suolo, ma riesce a comprimere la molla solo per metà della sua lunghezza a riposo, $\Delta l = l_0/2$. Questo significa che la velocità finale è nulla, $v=0$, nella posizione più bassa raggiunta dalla massa m, e che tale posizione più bassa non è zero (come prima) ma si ha una quota pari a metà lunghezza della molla. Quindi l'energia finale E_f è data dalla somma dell'energia potenziale elastica U_k (dovuta alla compressione di metà molla) con l'energia potenziale gravitazionale U_{gf} che si ha alla quota minima raggiunta da m:

$$U_k = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{l_0}{2}\right)^2$$

$$U_{gf} = mg\frac{l_0}{2}$$

$$E_f = U_k + U_{gf}$$

$$E_f = \frac{1}{8}kl_0^2 + \frac{1}{2}mgl_0$$

Uguagliando E_i con E_f otteniamo un'equazione per determinare la massa m:

$$E_i = E_f$$

$$mgH = \frac{1}{8}kl_0^2 + \frac{1}{2}mgl_0$$

$$mg\left(H-\frac{l_0}{2}\right)=\frac{1}{8}kl_0^2$$

$$m=\frac{kl_0^2}{4g(2H-l_0)}\approx 1.8\text{kg}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Prima dell'urto la scatola è in equilibrio sotto l'azione della forza peso F_P, diretta verso il basso (e quindi positiva con l'asse y rappresentato in figura), e della spinta di Archimede S_A, diretta verso l'alto (e quindi negativa):

$$m_1 a_y = F_P - S_A$$

$$F_P = m_1 g$$

$$S_A = \rho_{H2O} L^2 L_0 g$$

$$m_1 a_y = m_1 g - \rho_{H2O} L^2 L_0 g$$

All'equilibrio l'accelerazione a_y=0, da cui segue la profondità L_0 a cui si trova la scatola inizialmente:

$$m_1 g - \rho_{H2O} L^2 L_0 g = 0$$

$$L_0 = \frac{m_1}{\rho_{H2O} L^2} \approx 0.39\text{m}$$

Prima di urtare il fondo della scatola, la massa m_2 percorre una distanza verticale pari a H+L_0. Applicando la conservazione dell'energia meccanica si ottiene la velocità v_i con cui il corpo m_2 urta la scatola:

$$\frac{1}{2} m_2 v_i^2 = m_2 g(H+L_0)$$

$$v_i = \sqrt{2g(H+L_0)}$$

Dato che l'urto è perfettamente anelastico, si conserva solo la quantità di moto durante l'urto stesso, e per la velocità v_0 subito dopo l'urto possiamo scrivere che:

$$m_2 v_i = (m_1 + m_2) v_0$$

$$v_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2} v_i$$

$$v_0 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2g(H+L_0)} \approx 1.0\text{m/s}$$

Punto 2): Dopo l'urto anelastico, la scatola m_1 col corpo m_2 al suo interno possiede una velocità iniziale v_0 non nulla e inizia a muoversi verso il basso. Le forze in gioco sono come prima la forza peso e la spinta di Archimede:

$$F_P = (m_1 + m_2) g$$

$$S_A = \rho_{H2O} L^2 y g$$

dove nell'ultima formula y=$y(t)$ è una coordinata che dipende dal tempo e, facendo riferimento alla figura, coincide con la parte immersa della scatola. Scrivendo il II principio della dinamica si ottiene che:

$$(m_1 + m_2)a_y = F_P - S_A$$

$$(m_1 + m_2)a_y = (m_1 + m_2)g - \rho_{H2O} L^2 yg$$

con a_y positiva quando è diretta verso il basso.
Riarrangiando si ottiene la seguente espressione per l'accelerazione:

$$a_y(y) = g - \frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2} y$$

E portando tutti i termini al I membro si può vedere che si tratta di un moto armonico:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2} y - g = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2}\left(y - \frac{m_1 + m_2}{\rho_{H2O} L^2}\right) = 0$$

Rinominando y_0 il rapporto dentro le parentesi tonde, $y_0 = (m_1 + m_2)/\rho_{H2O} L^2$, si ottiene che:

$$y_0 = \frac{m_1 + m_2}{\rho_{H2O} L^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2}(y - y_0) = 0$$

Come si vede y_0 esprime la nuova posizione di equilibrio in cui forza peso e spinta di Archimede sono bilanciate (si confronti con l'espressione di L_0 trovata al punto 1) dopo l'urto anelastico che ha unito m_1 con m_2.
Poiché y_0 è una costante possiamo operare un semplice cambio di variabile e scrivere che:

$$Y(t) = y(t) - y_0$$

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + \frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2} Y = 0$$

In questa forma si vede chiaramente che $Y = y - y_0$ obbedisce a un moto armonico, la cui pulsazione ω è data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2}} \approx 4.5\text{Hz}$$

Punto 3): Dato che la variabile $Y(t)$ obbedisce a un'equazione differenziale di tipo armonico, la sua legge oraria sarà quella caratteristica di tale moto:

$$Y(t) = A\cos(\omega t) \quad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{\rho_{H2O} g L^2}{m_1 + m_2}} \approx 4.5\text{Hz}$$

dove A è l'ampiezza del moto di oscillazione.
Ripassando alla coordinata $y(t)$ che indica la profondità della scatola, si trova che:

$$Y(t) = y(t) - y_0 = A\cos(\omega t)$$
$$y(t) = y_0 + A\cos(\omega t)$$

L'ultima equazione descrive il moto della scatola, che è un moto oscillatorio intorno alla posizione di equilibrio y_0 e con ampiezza pari ad A. In accordo con tale equazione, si ha la profondità massima y_{MAX} raggiunta dalla scatola quando il $\cos(\omega t)=1$, per cui:

$$y_{MAX} = y_0 + A$$
$$A = y_{MAX} - y_0$$

Sostituendo a y_0 l'espressione trovata al punto 2), si ottiene che:

$$A = y_{MAX} - \frac{m_1 + m_2}{\rho_{H2O} L^2} \approx 0.24\text{m}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Le masse m_1 e M_2 costituiscono un sistema di corpi che si muovono in maniera solidale con la stessa accelerazione a, data l'inestensibilità della fune. Scegliamo per il corpo m_1 un sistema di riferimento con asse y rivolto verso l'alto; per essere solidali con m_1 dobbiamo scegliere allora un sistema di riferimento con asse y diretto verso il basso per M_2. In questo modo uno spostamento (o accelerazione) positivo di m_1, ovvero verso l'alto, coincide con uno spostamento (o accelerazione) positivo di M_2, verso il basso; tutto ciò è dovuto alla presenza della carrucola che ribalta il verso dell'asse y che è tangenziale alla fune.
Scriviamo il II principio della dinamica per i corpi m_1 e M_2: sul primo agiscono la forza peso m_1g e la pressione esterna p_0 verso il basso (contributi negativi), mentre la tensione T della fune e la pressione interna p_1 sono diretti verso l'alto (contributi positivi); sul secondo corpo agiscono la forza peso M_2g verso il basso (positiva) e la tensione T della fune verso l'alto (negativa). In formule si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} m_1 a = T + p_1 A - m_1 g - p_0 A \\ M_2 a = M_2 g - T \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene un'equazione per l'accelerazione a:

$$(m_1 + M_2)a = (p_1 - p_0)A + (M_2 - m_1)g$$
$$a = \frac{p_1 - p_0}{M_2 + m_1}A + \frac{M_2 - m_1}{M_2 + m_1}g \approx 0.93\text{m/s}^2$$

Sostituendo il valore di a appena trovato nella seconda equazione del sistema, si ottiene facilmente la tensione T della fune:

$$T = M_2 g - M_2 a \approx 532\text{N}$$

Punto 2): Dal risultato del punto 1) si vede che il pistone si muove verso l'alto. Se la trasformazione del gas è isoterma, come garantito dalle pareti conduttrici del recipiente e dalla presenza di un serbatotio termico a temperatura T_0=300K, ad un aumento di volume del gas corrisponde una diminuzione di pressione. Dalla formula dell'accelerazione trovata al punto 1), si vede allora che durante l'espansione del gas l'accelerazione varia (basta sostituire alla pressione iniziale p_1 la pressione generica p), più precisamente diminusce visto che diminuisce la pressione interna p. Si ha la posizione di equilibrio quando l'accelerazione a è nulla; imponendo a=0 nella formula del punto 1) si ha un'equazione per determinare la pressione p_2 raggiunta dal gas nel punto di equilibrio:

$$a = \frac{p - p_0}{M_2 + m_1} A + \frac{M_2 - m_1}{M_2 + m_1} g$$

$$\frac{p_2 - p_0}{M_2 + m_1} A + \frac{M_2 - m_1}{M_2 + m_1} g = 0$$

$$(p_2 - p_0)A = -(M_2 - m_1)g$$

$$p_2 A = p_0 A - (M_2 - m_1)g$$

$$p_2 = p_0 - \frac{M_2 - m_1}{A} g \approx 0.441 \cdot 10^5 \,\mathrm{Pa}$$

Sono note quindi la pressione iniziale p_1 e quella finale p_2 di una trasformazione isoterma. Per calcolare la variazione di entropia ΔS_{12} fra lo stato 1 e lo stato 2, si ricordi che durante una trasformazione isoterma il calore scambiato dal gas è ΔQ_{12} dato da:

$$\Delta Q_{12} = nRT_0 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

dove T_0=300K è la temperatura esterna a cui avviene la trasformazione isoterma, mentre V_2 e V_1 sono rispettivamente il volume finale e iniziale della trasformazione. Per un'isoterma vale la legge di Boyle, per cui:

$$p_2 V_2 = p_1 V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\frac{Ah_2}{Ah_1} = \frac{p_1}{p_2} \longrightarrow h_2 = h_1 \frac{p_1}{p_2}$$

Nell'ultimo passaggio è stata indicata con h_2 la posizione di equilibrio del pistone, e si è indicato il volume V occupato dal gas come $V=A \cdot h$. Sostituendo il rapporto $V_2/V_1=p_1/p_2$ nella formula per ΔQ_{12} si ottiene che:

$$\Delta Q_{12} = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

e poiché la trasformazione è a temperatura costante, possiamo scrivere la seguente formula per la variazione di entropia ΔS_{12}:

$$\Delta S_{12} = \frac{\Delta Q_{12}}{T_0}$$

$$\Delta S_{12} = nR \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Occorre determinare il numero n di moli che si hanno nel recipiente. Nella situazione iniziale il gas si trova a temperatura T_0, pressione p_1 e occupa il volume $V_1=A \cdot h_1$; applicando l'equazione di stato dei gas perfetti si trova che:

$$p_1 V_1 = nRT_0$$

$$n = \frac{p_1 A h_1}{RT_0} \approx 0.1 \,\mathrm{moli}$$

Si ottiene allora che la variazione di entropia è pari a:

$$\Delta S_{12} = nR\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) \approx 0.1\text{J/K}$$

Punto 3): La posizione di equilibrio è quella posizione in cui l'accelerazione a è nulla, come determinata al punto 2), ma in generale questo non significa che un sistema sia anche in quiete (velocità v nulla) nella posizione di equilibrio. Per determinare la velocità v con cui il pistone m_1 arriva nella posizione di equilibrio, applichiamo un bilancio dell'energia meccanica in presenza di lavoro scambiato con l'esterno. Si consideri il sistema costituito dalle masse m_1 e M_2: esse hanno un'energia potenziale inziale e finale, U_g, dovuta alla forza di gravità, e un'energia cinetica, K, iniziale e finale. Dato che il sistema di masse è inizialmente in quiete, l'energia cinetica iniziale K_i è nulla.
L'energia meccanica totale di questo sistema di masse non si conserva perché del lavoro viene scambiato col gas e con la pressione p_0: il gas durante l'espansione isoterma compie un lavoro verso l'esterno, ΔW_{gas}, che si trasferisce al sistema di masse, mentre del lavoro negativo viene compiuto dalla pressione p_0 durante lo spostamento del pistone verso l'alto, ΔW_{p0}. Il bilancio dell'energia meccanica del sistema di masse (m_1, M_2) si scrive allora come segue:

$$E_f - E_i = \Delta W_{gas} + \Delta W_{p0}$$

dove E_f e E_i sono rispettivamente l'energia meccanica finale e iniziale del sistema (m_1, M_2) e i termini ΔW costituiscono i lavori (positivi e negativi) scambiati con l'esterno. Per l'energia iniziale abbiamo solo energia potenziale, dato che l'energia cinetica è nulla:

$$E_i = m_1 g h_1 + M_2 g H_1$$

dove con H_1 è stata indicata la quota iniziale a cui si trova il corpo M_2. Per l'energia finale si ha sia energia potenziale che cinetica:

$$E_f = m_1 g h_2 + M_2 g H_2 + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2$$

dove con H_2 è stata indicata la quota finale del corpo M_2; dato che m_1 e M_2 si muovono in maniera solidale hanno anche la stessa velocità v.
Per quanto riguarda il lavoro ΔW_{gas}, si osservi che in una trasformazione isoterma il lavoro scambiato con l'esterno coincide col calore scambiato. Dal punto 2) sappiamo che il calore scambiato è pari a ΔQ_{12}:

$$\Delta Q_{12} = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

da cui segue che il lavoro ΔW_{gas} è dato dalla stessa espressione:

$$\Delta W_{gas} = \Delta Q_{12} = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

Invece il lavoro negativo, ΔW_{p0}, fatto dalla pressione esterna p_0 è dato da:

$$\Delta W_{p0} = -p_0 \Delta V = -p_0 A(h_2 - h_1)$$

Mettendo insieme tutti i termini nel bilancio energetico si ottiene che:

$$E_f - E_i = \Delta W_{gas} + \Delta W_{p0}$$

$$m_1 g h_2 + M_2 g H_2 + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 - m_1 g h_1 - M_2 g H_1 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A(h_2 - h_1)$$

$$m_1 g(h_2 - h_1) + M_2 g(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A(h_2 - h_1)$$

Si noti che m_1 e M_2 si muovono in maniera solidale e coprono la stessa distanza, ma mentre il corpo m_1 sale di quota il corpo M_2 scende di quota, per cui si ha che:

$$h_2 - h_1 = -(H_2 - H_1)$$

ovvero gli spostamenti di m_1 e M_2 sono uguali in modulo ma opposti in segno. Il bilancio dell'energia diventa allora:

$$m_1 g(h_2 - h_1) - M_2 g(h_2 - h_1) + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A(h_2 - h_1)$$

$$(m_1 - M_2)g\Delta h + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A\Delta h$$

dove si è indicato con $\Delta h = h_2 - h_1$ lo spostamento di m_1 dalla posizione iniziale a quella di equilibrio. Nel punto 2) era stata messa in evidenza la seguente espressione per h_2:

$$h_2 = h_1 \frac{p_1}{p_2}$$

da cui segue un'espressione per Δh:

$$\Delta h = h_2 - h_1$$

$$\Delta h = h_1 \frac{p_1}{p_2} - h_1 = \left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1$$

Sostituendo quest'ultima formula nel bilancio energetico si trova che:

$$(m_1 - M_2)\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1 g + \frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1$$

Riarrangiando possiamo trovare un'espressione per la velocità v:

$$\frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - p_0 A\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1 - (m_1 - M_2)\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1 g$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + M_2)v^2 = nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left[p_0 A + (m_1 - M_2)g\right]\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1$$

$$v^2 = \frac{2}{m_1 + M_2}\left\{nRT_0 \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) - \left[p_0 A + (m_1 - M_2)g\right]\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)h_1\right\} \approx 0.06\,\mathrm{m^2/s^2}$$

$$v \approx 0.24\,\mathrm{m/s}$$