Risultati esame scritto Fisica 2 - 12/09/2016
orali: 20-09-2016 alle ore 10.30 presso aula H

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

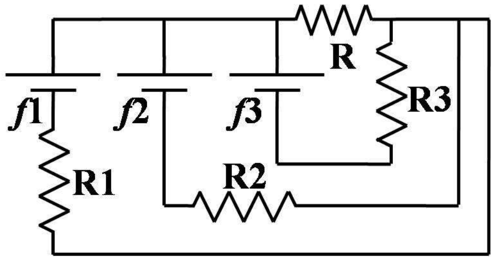
matricola	voto	
120980	nc	
118525	12	
112117	nc	
114920	10	
114922	17	ammesso
114896	17	ammesso
115088	17	ammesso
118481	18	ammesso
118478	19	ammesso
114931	18	ammesso
207462	11	
110910	12	
118524	nc	
118497	11	
109860	18	ammesso
113481	12	
207328	13	
		nc=non classificato

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 12/09/2016

Problema 1

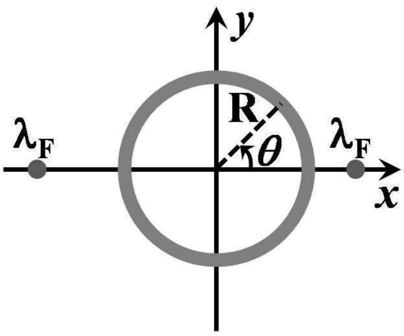
Nel circuito in figura sono noti i valori dei potenziali dei generatori di tensione, f_1=10V, f_2=20V e f_3=30V, e i valori delle resistenze del circuito, R_1=1.0Ω, R_2=2.0Ω, R_3=3.0Ω e R=6.0Ω.
Determinare il valore della corrente, *i*, che circola sulla resistenza *R* e la caduta di tensione ai suoi capi, ΔV.
Si determini inoltre il valore della potenza istantanea fornita da ciascun generatore, dichiarando esplicitamente se si tratta di potenza assorbita dal generatore o erogata verso l'esterno.



Problema 2

Sia dato un anello filiforme di raggio *R* giacente nel piano (*x*,*y*), con centro dell'anello posizionato nell'origine del sistema di riferimento (*x*,*y*), e avente carica positiva. Detto θ l'angolo misurato in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle *x*, l'anello possiede una densità di carica elettrica per unità di lunghezza, $\lambda=\lambda(\theta)$, non uniforme. La funzione che descrive la densità di carica λ è data da: $\lambda(\theta)=\lambda_0\cdot(1+\cos\theta)$, dove $\lambda_0>0$ è una costante avente le dimensioni di una densità di carica elettrica per unità di lunghezza.

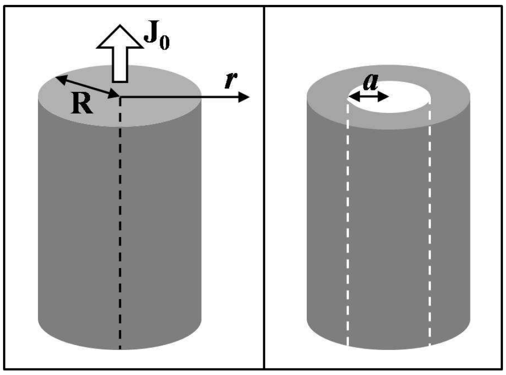
1) Determinare il valore massimo e il valore minimo della densità $\lambda(\theta)$, e i relativi angoli θ;dare una rappresentazione grafica della densità $\lambda(\theta)$.
2) Determinare il vettore campo elettrico **E** al centro dell'anello.
3) Siano aggiunti al sistema due fili infiniti, entrambi con densità di carica uniforme λ_F, ortogonali al piano (*x*,*y*). Il primo filo è situato nella posizione (–2*R*,0) e il secondo nella posizione (+3*R*/2,0), come in figura. Determinare la densità di carica λ_F dei fili affinché il campo elettrico **E** sia nullo al centro dell'anello.
[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: λ_0, *R*, e ove necessario delle costanti universali].



Problema 3

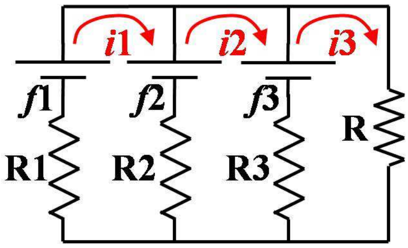
Sia dato un conduttore cilindrico di lunghezza infinita e raggio *R* percorso da corrente con densità pari a J_0 parallela all'asse del cilindro (verso l'alto in figura). Sia detta *r* la coordinata radiale che parte dall'asse del cilindro ed è diretta verso l'esterno.

1) Nel caso in cui J_0 sia uniforme su tutta la sezione del cilindro, determinare il campo magnetico *B* all'interno e all'esterno del conduttore (per $0<r<\infty$), e si dia una rappresentazione grafica di *B*(*r*) in funzione di *r*.
2) Nel cilindro sia praticato un foro cilindrico parallelo all'asse e di raggio *a*=*R*/2, per tutta la lunghezza del conduttore e concentrico col conduttore stesso (ovvero l'asse del foro coincide con l'asse del conduttore) come rappresentato nella figura di destra; si determini il campo magnetico *B* all'interno e all'esterno del conduttore (per $0<r<\infty$) sempre nel caso di densità di corrente J_0 uniforme sulla sezione del conduttore.
3) Si consideri di nuovo il conduttore privo di foro (ovvero il cilindro pieno nella figura di sinistra), ma percorso da una corrente con densità non uniforme $J(r)=J_0\cdot\exp[(r-R)/\lambda]$ sulla sezione del cilindro, dove λ è una costante positiva avente le dimensioni di una lunghezza e tale che $\lambda<R$; si dia una rappresentazione grafica della densità di corrente *J*(*r*) in funzione di *r*, e si determini il campo magnetico *B* all'interno e all'esterno del conduttore (per $0<r<\infty$) [per il punto 3 potrebbe servire l'integrale $\int x\cdot e^{x/c}dx = c^2e^{x/c}(x/c-1)$ dove *c* è un parametro costante].
[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: *R*, J_0, λ, oltre che della coordinata radiale *r*, e ove necessario delle costanti universali]



Soluzione problema 1

Il circuito del problema è equivalente a quello riportato qui in figura. Come si vede il circuito può essere interpretato come 3 generatori di tensione continua (f_1, f_2 e f_3) con le rispettive resistenze interne (R_1, R_2 e R_3) collegati in parallelo fra loro e chiusi sulla resistenza esterna R.



Si tratta quindi di un circuito con 3 maglie, e scegliendo i_1, i_2 e i_3 come riportato in figura (tutte in senso orario), il metodo delle maglie si scrive come segue:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = (R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 + 0 \cdot i_3 \\ f_2 - f_3 = -R_2 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 - R_3 i_3 \\ f_3 = 0 \cdot i_1 - R_3 i_2 + (R_3 + R)i_3 \end{cases}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene un sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} 10 - 20 = (1+2)i_1 - 2 \cdot i_2 + 0 \cdot i_3 \\ 20 - 30 = -2 \cdot i_1 + 5 \cdot i_2 - 3 \cdot i_3 \\ 30 = 0 \cdot i_1 - 3 \cdot i_2 + (3+6)i_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10 = 3i_1 - 2i_2 + 0 \cdot i_3 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ 30 = 0 \cdot i_1 - 3i_2 + 9i_3 \end{cases}$$

Per la soluzione del sistema seguiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{cases} -10 = 3i_1 - 2i_2 + 0 \cdot i_3 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ 10 = 0 \cdot i_1 - 1 \cdot i_2 + 3i_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10 = 3i_1 - 2i_2 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ 0 = -2i_1 + 4i_2 \end{cases}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito la terza equazione con la somma delle ultime 2 equazioni.

$$\begin{cases} -10 = 3i_1 - 2i_2 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ i_1 = +2i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -10 = 3(2i_2) - 2i_2 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ i_1 = +2i_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_2 = -10/4 = -2.5 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ i_1 = +2i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_2 = -2.5 \\ -10 = -2i_1 + 5i_2 - 3i_3 \\ i_1 = -5.0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_2 = -2.5 \\ -10 = -2 \cdot (-5.0) + 5 \cdot (-2.5) - 3i_3 \\ i_1 = -5.0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_2 = -2.5 \\ i_3 = +2.5 \\ i_1 = -5.0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema è data quindi dalle seguenti correnti:

$$\begin{cases} i_1 = -5.0\text{A} \\ i_2 = -2.5\text{A} \\ i_3 = +2.5\text{A} \end{cases}$$

Alternativamente si può calcolare la soluzione del sistema mediante il metodo di Cramer che risulta vantaggioso perché la matrice dei coeifficienti di i_1, i_2 e i_3 contiene diversi zeri; calcoliamo il determinante della matrice dei coefficienti:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 72$$

Per calcolare i_1 sostituiamo, nella matrice dei coefficienti, la colonna che riguarda i_1 con la colonna dei termini noti, e ne calcoliamo il determinante:

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & -2 & 0 \\ -10 & 5 & -3 \\ 30 & -3 & 9 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-360}{72} = -5.0\text{A}$$

Analogamente per i_2 e i_3, sostituendo le rispettive colonne nella matrice dei coefficienti:

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -2 & -10 & -3 \\ 0 & 30 & 9 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-180}{72} = -2.5\text{A}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -10 \\ -2 & 5 & -10 \\ 0 & -3 & 30 \end{vmatrix}}{D} = \frac{180}{72} = +2.5\text{A}$$

La corrente *i* che circola sulla resistenza *R* è pari a i_3=+2.5A, dall'alto verso il basso nella presente figura, e che equivale ad una corrente da sinistra verso destra nella figura riportata nel testo del problema. La caduta di tensione ΔV ai capi di *R* è data dalla legge di Ohm:

$$\Delta V = i_3 R = 15\text{V}$$

La potenza istantanea *W* erogata da un generatore percorso da corrente *i*, è del tutto in generale data dalla segeuente formula:

$$W = f \cdot i$$

dove *f* è la tensione continua prodotta dal generatore.

In particolare *W*>0 se la corrente *i* attraversa il generatore *f* dal polo negativo verso quello positivo, nel qual caso il generatore sta erogando potenza verso l'esterno; invece *W*<0 se avviene il contrario, ovvero se la corrente *i* attraversa il generatore *f* dal polo positivo verso quello negativo, nel qual caso il generatore sta assorbendo potenza al suo interno. Dato che nella scelta delle correnti i_1, i_2 e i_3 abbiamo imposto per tutte le correnti il verso orario, che è quello concorde ai generatori f_1, f_2 e f_3, possiamo usare le correnti risultanti dal metodo delle maglie con i rispettivi segni.

Nel calcolo delle potenze istantanee dobbiamo però tenere conto che:

il generatore f_1 è attraversato solo dalla corrente i_1,

il generatore f_2 è attraversato dalla combinazione di correnti i_2–i_1,

il generatore f_3 è attraversato dalla combinazione di correnti i_3–i_2.

Si ottengono allora le seguenti espressioni per le potenze istantanee:

$$W_1 = f_1 i_1 = -50\text{W}$$

$$W_2 = f_2 (i_2 - i_1) = +50\text{W}$$

$$W_3 = f_3 (i_3 - i_2) = +150\text{W}$$

da cui si vede che il generatore f_1 sta assorbendo potenza al suo interno, mentre f_2 e f_3 stanno erogando potenza verso l'esterno.

Soluzione problema 2

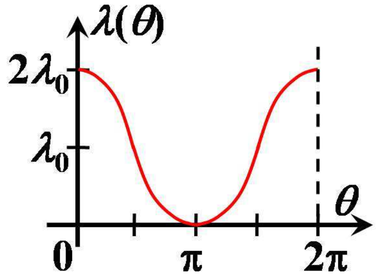
Punto 1): Dato che $\lambda(\theta)=\lambda_0\cdot(1+\cos\theta)$ con $\lambda_0>0$, il massimo e il minimo di $\lambda(\theta)$ coincidono col massimo e minimo della funzione $(1+\cos\theta)$. Poiché il $\cos\theta$ assume valori nell'intervallo $[-1,+1]$, la funzione $(1+\cos\theta)$ assume valori nell'intervallo $[0,+2]$. Ne segue che la funzione $\lambda(\theta)=\lambda_0\cdot(1+\cos\theta)$ è sempre maggiore di zero, ovvero la densità di carica dell'anello è ovunque positiva.

Il valore massimo e minimo coincidono col valore massimo e minimo di $\cos\theta$, ovvero per $\theta=0$ (il massimo) e $\theta=\pi$ (il minimo):

$$\lambda(\theta=0)=\lambda_0(1+\cos 0)=2\lambda_0 \qquad \text{valore massimo per } \theta=0$$

$$\lambda(\theta=\pi)=\lambda_0(1+\cos\pi)=0 \qquad \text{valore minimo per } \theta=\pi$$

Nella figura è riportato l'andamento di $\lambda(\theta)$ in funzione di θ. L'andamento trovato per $\lambda(\theta)$ ci dice che la densità massima di carica si trova sul lato destro dell'anello, nel punto di intersezione col semiasse positivo delle x, e che λ diminuisce man mano che ci si sposta verso sinistra, fino a raggiungere il valore minimo $\lambda=0$ nel punto di intersezione fra anello e semiasse negativo delle x.



Punto 2): Per calcolare il campo elettrico al centro dell'anello dividiamo l'anello stesso in tante porzioni infinitesime, di lunghezza $R\cdot d\theta$ dove $d\theta$ è lo spostamento angolare lungo l'anello. Questa porzione infinitesima genera un campo elettrico infinitesimo $d\mathbf{E}$ al centro dell'anello, il cui modulo dE sarà dato da:

$$dE=\frac{\lambda(\theta)Rd\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda(\theta)d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

Dalla figura si vede che le componenti del campo elettrico infinitesimo $d\mathbf{E}$ sono date da:

$$\begin{cases} dE_x=-dE\cos\theta \\ dE_y=-dE\sin\theta \end{cases}$$

Sostituendo alle precedenti le espressioni per dE e per $\lambda(\theta)$ si ottiene che:

$$\begin{cases} dE_x=-\dfrac{\lambda(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta \\ dE_y=-\dfrac{\lambda(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dE_x=-\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}(1+\cos\theta)\cos\theta d\theta \\ dE_y=-\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}(1+\cos\theta)\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Sommando (integrando) i contributi dE_x e dE_y su tutto l'anello si ottengono i valori delle componenti del campo elettrico, E_x e E_y:

$$\begin{cases} E_x=\oint dE_x=-\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta d\theta \\ E_y=\oint dE_y=-\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)\sin\theta d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta + \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right) \\ E_y = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta + \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\right) \\ E_y = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta\right) \end{cases}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che l'integrale sul periodo $[0,2\pi]$ di $\cos\theta$ e $\sin\theta$ sono entrambi nulli. Continuando si ottiene che:

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\pi = -\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R} \\ E_y = -\dfrac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = 0 \end{cases}$$

Negli ultimi passaggi abbiamo sfruttato che l'integrale su un periodo $[0,2\pi]$ di $\cos^2\theta$ è pari a π, mentre l'integrale su $[0,2\pi]$ di $\sin 2\theta$ è pari a zero (analogamente a $\sin\theta$ e $\cos\theta$).
Riassumendo il campo elettrico **E** al centro dell'anello è pari a:

$$\mathbf{E} = (E_x, E_y) = \left(-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}, 0\right)$$

Punto 3): Dal punto 2) si vede che il campo elettrico generato dall'anello al suo centro giace lungo l'asse x. Dato che i due fili infiniti sono posizionati sull'asse x e generano dei campi elettrici a simmetria cilindrica con la componente radiale uscente dal filo (o entrante nel filo a seconda della densità di carica λ_F), anche i campi generati dai fili nel centro dell'anello sono diretti lungo l'asse x. Affinché il campo elettrico al centro dell'anello sia nullo, bisogna allora imporre che sia zero la somma dei campi elettrici E_x generati dall'anello (vedi punto 2) e dai due fili.
I campi elettrici del filo infinito a sinistra, $E_{x,s}$, e del filo infinito a destra, $E_{x,d}$, sono dati rispettivamente da:

$$E_{x,s} = +\frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0 (2R)}$$

$$E_{x,d} = -\frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0 (3R/2)}$$

dove al denominatore abbiamo imposto le rispettive distanze dal centro dell'anello, $2R$ e $3R/2$, mentre i segni sono in accordo con la direzione radiale uscente dai fili.

Sommando tutti i contributi sull'asse x, si ottiene il campo elettrico totale lungo x (come evidenziato sopra la componente del campo lungo y è nulla nel centro dell'anello):

$$E_{TOT} = E_x + E_{x,s} + E_{x,d}$$

$$E_{TOT} = -\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R} + \frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0 (2R)} - \frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0 (3R/2)}$$

Per avere campo nullo al centro dell'anello imponiamo $E_{TOT}=0$ e otteniamo un'equazione per la densità di carica λ_F:

$$-\frac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}+\frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0(2R)}-\frac{\lambda_F}{2\pi\varepsilon_0(3R/2)}=0$$

$$-\frac{\lambda_0}{4}+\frac{\lambda_F}{4\pi}-\frac{\lambda_F}{3\pi}=0$$

$$\frac{\lambda_F}{\pi}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\lambda_0}{4}$$

$$\lambda_F=-3\pi\lambda_0$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Il problema di un conduttore cilindrico di lunghezza infinita, percorso da densità di corrente uniforme, possiede simmetria cilindrica analogamente a quanto accade per un filo infinito percorso da corrente. Il vettore campo magnetico **B** possiede allora le stesse caratteristiche di direzione e verso che si hanno nel caso del filo infinito, ovvero il vettore **B** è tangente a circonferenze concentriche col conduttore cilindrico, e ha verso che gira in senso antiorario attorno alla corrente di densità J_0. Su ciascuna di tale circonferenze, quindi a distanza r fissata dall'asse del cilindro, il vettore **B** ha modulo costante ed è tangente alla circonferenza; siamo quindi in condizione di applicare facilmente il teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint \mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}=\mu_0 I_{CONC}$$

dove il termine integrale rappresenta la circuitazione del vettore **B** su una circonferenza di raggio generico r concentrica all'asse del conduttore, mentre la corrente I_{CONC} rappresenta la corrente che attraversa tale cerchio di raggio r. Nel caso di J_0 uniforme e $r<R$, la precedente relazione diventa:

$$2\pi r B=\mu_0 J_0 \pi r^2 \qquad \text{per } 0<r<R$$

$$B(r)=\frac{\mu_0 J_0}{2}r$$

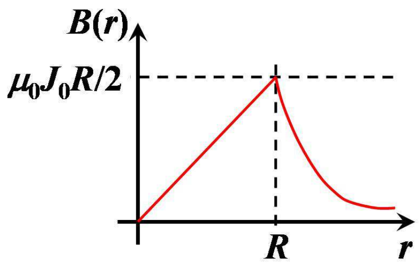
Ovvero non tutta la corrente che attraversa il conduttore in tutta la sua sezione contribuisce al campo magnetico $B(r)$, ma solo la corrente che circola all'interno del cerchio di raggio $r<R$.

Invece per $r>R$ la corrente concatenata è tutta la corrente che attraversa il conduttore, per cui la relazione di Ampere diventa:

$$2\pi r B=\mu_0 J_0 \pi R^2 \qquad \text{per } r>R$$

$$B(r)=\frac{\mu_0 J_0}{2}\frac{R^2}{r}$$

Combinando i due risultati ottenuti per $0<r<R$ e per $r>R$ si ottiene il seguente grafico di $B(r)$ in funzione di r:



Punto 2): Dato che il foro è coassiale col conuttore cilindrico, viene preservata la simmetria cilindrica e il vettore **B** è ancora tangente a circonferenze concentriche con l'asse del cilindro, con verso che gira in senso antiorario intorno alla direzione della corrente J_0; soprattutto, data una circonferenza concentrica di raggio r, il vettore **B** ha modulo costante su di essa. Di nuovo è possibile applicare in maniera semplice il teorema di Ampere:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

nelle seguenti tre regioni: $0<r<a$ internamente al foro cilindrico, $a<r<R$ nella regione del conduttore, e $r>R$ al di fuori del conduttore.

Nella prima regione, $0<r<a$, si ha:

$$2\pi r B = 0 \qquad \text{per } 0 < r < a$$

$$B(r) = 0$$

perchè nel foro non si ha ovviamente passaggio di corrente (quindi $I_{CONC}=0$).

Nella seconda regione, $a<r<R$, si ha:

$$2\pi r B = \mu_0 J_0 \pi \left(r^2 - a^2\right) \qquad \text{per } a < r < R$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r - \frac{R^2}{4r}\right)$$

dove nell'ultimo passaggio è stata fatta la sostituzione $a=R/2$.

Nella terza regione, $r>R$, si ha:

$$2\pi r B = \mu_0 J_0 \pi \left(R^2 - a^2\right) \qquad \text{per } r > R$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0 \left(R^2 - a^2\right)}{2r}$$

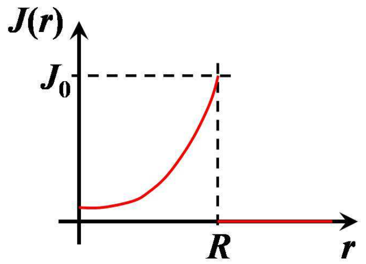
$$B(r) = \frac{3\mu_0 J_0}{8}\frac{R^2}{r}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata fatta la sostituzione $a=R/2$.

Punto 3): Nell'ultimo caso il conduttore è nuovamente un cilindro pieno ma con densità di corrente, $J(r)$, non uniforme attraverso la sezione:

$$J(r) = J_0 \exp\left(\frac{r-R}{\lambda}\right) \qquad \text{per } 0 < r < R$$

dove ovviamente la corrente è nulla, $J(r)=0$, al di fuori del conduttore (per $r>R$). Dato che dove abbiamo $J(r)\neq 0$ si ha anche che $r-R<0$, la funzione $J(r)$ riportata sopra rappresenta una densità di corrente che decresce esponenzialmente dalla superficie esterna del conduttore cilindrico, dove si ha il valore massimo di $J(r)$, verso l'asse del cilindro, dove si ha il suo valore minimo:



Dato che $J(r)$ dipende solo dalla coordinata radiale, viene conservata anche in questo caso la simmetria cilindrica e possiamo applicare il teorema di Ampere come nei punti precedenti:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

dove la circuitazione a sinistra è calcolata come nei punti precedenti su una circonferenza di raggio r. Bisogna però prestare attenzione al calcolo della corrente I_{CONC} che attraversa il cerchio di raggio r, perché in questo caso la densità di corrente varia con la distanza dall'asse del cilindro e non è uniforme sul cerchio di raggio r.
Scomponiamo il cerchio di raggio r in tanti anelli concentrici di raggio r' (con $0< r'<r$) ciascuno di spessore infinitesimo dr'; su tale anello di spessore infinitesimo possiamo assumere la densità di corrente $J(r')$ uniforme e quindi la corrente $dI(r')$ che attraversa l'anello è data da:

$$dI(r') = J(r')dS$$

con dS superficie dell'anello infinitesimo di raggio r'.
Dato lo spessore trascurabile dell'anello, la superficie dS può essere scritta come:

$$dS = 2\pi r' dr'$$

da cui segue la seguente espressione per $dI(r')$:

$$dI(r') = J(r') 2\pi r' dr'$$

$$dI(r') = 2\pi J_0 \cdot r' \exp\left(\frac{r'-R}{\lambda}\right) dr'$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito a $J(r')$ l'espressione della densità di corrente.
L'ultima espressione rappresenta la corrente che attraversa un'anello di raggio r' e spessore trascurabile. Per avere la corrente $I(r)$ che attraversa un cerchio di raggio $r>r'$ scomposto in tanti anelli concentrici di spessore tracurabile, basta sommare (integrare) tutti i termini $dI(r')$ fra $r'=0$ e $r'=r$:

$$I(r) = \int_{r'=0}^{r'=r} dI(r')$$

$$I(r) = \int_{r'=0}^{r'=r} 2\pi J_0 \cdot r' e^{(r'-R)/\lambda} dr'$$

$$I(r) = 2\pi J_0 e^{-R/\lambda} \int_{r'=0}^{r'=r} r' e^{r'/\lambda} dr'$$

L'ultimo integrale scritto è analogo a quello riportato nel suggerimento al punto 3) del problema, con $c=\lambda$ e $x=r'$. Sfruttando la primitiva riportata nel suggerimento, il risultato dell'integrale diventa:

$$\int_{r'=0}^{r'=r} r' e^{r'/\lambda} dr' = \left[\lambda^2 e^{r'/\lambda} \left(\frac{r'}{\lambda} - 1 \right) \right]_{r'=0}^{r'=r}$$

$$\int_{r'=0}^{r'=r} r' e^{r'/\lambda} dr' = \lambda^2 \left[e^{r/\lambda} \left(\frac{r}{\lambda} - 1 \right) + 1 \right]$$

Da questo segue che la corrente concatenata, $I_{CONC}=I(r)$, al cerchio di raggio $r<R$ è data da:

$$I(r) = 2\pi J_0 e^{-R/\lambda} \lambda^2 \left[e^{r/\lambda} \left(\frac{r}{\lambda} - 1 \right) + 1 \right]$$

Tornando al teorema di Ampere all'interno del conduttore si ha allora che:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

$$2\pi r B = \mu_0 2\pi J_0 \lambda^2 e^{-R/\lambda} \left[e^{r/\lambda} \left(\frac{r}{\lambda} - 1 \right) + 1 \right]$$

$$B(r) = \mu_0 J_0 \lambda^2 e^{-R/\lambda} \left[e^{r/\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad \text{per } 0 < r < R$$

dove l'ultima formula riporta il modulo del campo magnetico $B(r)$ all'interno del cilindro conduttore, in funzione della coordinata radiale r.

Al di fuori del conduttore, ovvero per $r>R$, possiamo ancora applicare il teorema di Ampere calcolando tutta la corrente $I(R)$ che attraversa la sezione del conduttore. A tal fine basta imporre $r=R$ nella formula trovata sopra per la corrente $I(r)$:

$$I(R) = 2\pi J_0 e^{-R/\lambda} \lambda^2 \left[e^{R/\lambda} \left(\frac{R}{\lambda} - 1 \right) + 1 \right]$$

$$I(R) = 2\pi J_0 \lambda^2 \left(\frac{R}{\lambda} - 1 + e^{-R/\lambda} \right)$$

Il teorema di Ampere diventa allora:

$$2\pi r B = \mu_0 2\pi J_0 \lambda^2 \left(\frac{R}{\lambda} - 1 + e^{-R/\lambda} \right)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 J_0 \lambda^2}{r} \left(\frac{R}{\lambda} - 1 + e^{-R/\lambda} \right) \quad \text{per } r > R$$