Risultati esame scritto Fisica 2 del 03/10/2016
orali: 11/10/2016 alle ore 10.30 presso aula H

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
120980	17	ammesso
118525	17	ammesso
112117	17	ammesso
114561	17	ammesso
114920	17	ammesso
114896	17	ammesso
114683	nc	
114870	17	ammesso
207822	17	ammesso
207462	14	
108488	17	ammesso
207248	13	
110910	17	ammesso
118524	13	
118497	nc	
113481	17	ammesso
207328	19	ammesso

nc=non classificato (<10)

Esame di Fisica 2

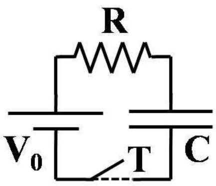
Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 03/10/2016

Problema 1

Sia dato un circuito costituito da una resistenza elettrica R, da un condensatore C e da un generatore di tensione continua V_0 collegati in serie, come in figura. Inizialmente l'interruttore T è aperto e il condensatore C è scarico. All'istante t=0 viene chiuso l'interruttore e il generatore inizia a caricare il condensatore attraverso la resistenza R.

1) Determinare l'energia totale accumulata nel condensatore, U_C, alla fine del processo di carica.
2) Determinare l'espressione della corrente in funzione del tempo, $I=I(t)$, che circola nel circuito.
3) Determinare la potenza istantanea erogata dal generatore in funzione di t, $W_G=W_G(t)$, e calcolare l'energia totale U_G erogata dal generatore durante il processo di carica.
4) Determinare la potenza istantanea dissipata nella resistenza in funzione di t, $W_R=W_R(t)$, e calcolare l'energia totale U_R dissipata nella resistenza durante il processo di carica.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: C, R, V_0, e ove necessario del tempo t e delle costanti universali].

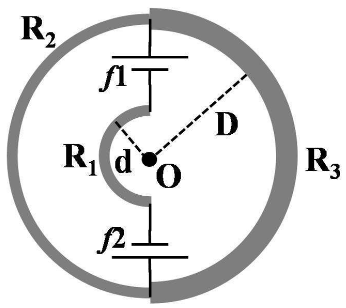


Problema 2

Siano dati tre pezzi di filo conduttore con resistività elettrica ρ_R, modellati in modo da formare tre semicirconferenze. La prima semicirconferenza ha raggio pari a $d=a$ e il filo ha sezione S, la seconda semicirconferenza ha raggio pari a $D=3\cdot a$ e ancora sezione pari a S, la terza semicirconferenza ha di nuovo raggio pari a $D=3\cdot a$ ma sezione pari a $2\cdot S$. Le tre semicirconferenze conduttrici sono collegate come in figura, mediante dei fili di resistenza elettrica trascurabile, e alimentate dai generatori di tensione continua $f_1=V_0$ e $f_2=2\cdot V_0$ disposti come in figura.

1) Determinare le espressioni delle resistenze elettriche R_1, R_2 e R_3 delle tre semicirconferenze.
2) Determinare le correnti I_{R1}, I_{R2} e I_{R3} che circolano sulle tre semicirconferenze.
3) Determinare il vettore campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) generato dal circuito nel suo centro (indicato con la lettera O in figura).

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: ρ_R, a, S, V_0, e ove necessario delle costanti universali].

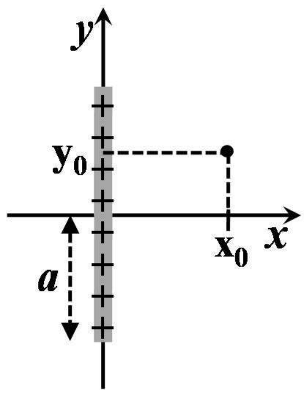


Problema 3

Sia data una sbarretta di lunghezza $2a$ e sezione trascurabile, con carica positiva e densità di carica per unità di lunghezza pari a λ. Essa è disposta lungo l'asse verticale y di un piano cartesiano, con origine coincidente col centro della sbarretta (vedi figura).

1) Determinare le espressioni in funzione di y delle componenti cartesiane del campo elettrico, $E_x(y)$ e $E_y(y)$, per i punti del piano giacenti sull'asse verticale (x=0), per $y>+a$ e $y<-a$.
2) Determinare le espressioni in funzione di x delle componenti cartesiane del campo elettrico, $E_x(x)$ e $E_y(x)$, per i punti del piano giacenti sull'asse orizzontale (y=0).
3) Determinare le espressioni delle componenti cartesiane del campo elettrico, E_x e E_y, nella posizione ($x_0=a$, $y_0=a/2$).

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: a, λ, e ove necessario delle coordinate (x,y) e delle costanti universali]



Soluzione problema 1

Punto 1): L'eneriga accumulata in un condensatore è data dalla seguente formula:

$$U_C = \frac{1}{2} C V^2$$

dove C è la capacità del condensatore e V la differenza di potenziale ai capi delle sue armature. Siccome inizialmente il condensatore C è scarico, l'energia iniziale in esso accumulata è pari a zero (perché V=0). Invece alla fine del processo di carica, il condensatore avrà una differenza di potenziale fra le piastre pari alla differenza di potenziale V_0 del generatore di tensione. Pertanto l'energia finale accumulata nel condensatore è data da:

$$U_C = \frac{1}{2} C V_0^2$$

Punto 2): Dopo la chiusura dell'interruttore il generatore di tensione V_0 porta cariche sulle piastre di C, accumulando su di esse una carica pari a $Q(t)$ (che è funzione del tempo t). La differenza di potenziale V_C ai capi di C è data, per ogni istante t, dalla formula dei condensatori:

$$V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Tale differenza di potenziale V_C si oppone al generatore di tensione V_0. Ad ogni istante t abbiamo allora la seguente equazione per il circuito:

$$V_0 - V_C(t) = RI(t)$$

$$V_0 - \frac{Q(t)}{C} = R\frac{dQ}{dt}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto del fatto che la corrente $I(t)$ che circola nel circuito è responsabile dell'accumulo di carica $Q(t)$ sulle piastre di C, per cui $dQ=I\cdot dt \rightarrow I=dQ/dt$. L'ultima espressione scritta è un'equazione differenziale risolvibile per separazione di variabili. Facendo alcuni passaggi:

$$\frac{V_0}{R} - \frac{Q(t)}{RC} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\frac{dQ}{\frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}} = dt$$

$$\frac{dQ}{Q - V_0 C} = -\frac{dt}{RC}$$

$$\int_0^{Q'} \frac{dQ}{Q - V_0 C} = -\int_0^{t'} \frac{dt}{RC}$$

$$\left[\ln(Q - V_0 C)\right]_0^{Q'} = -\frac{t'}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{Q' - V_0 C}{-V_0 C}\right) = -\frac{t'}{RC}$$

$$Q' - V_0 C = -V_0 C \exp\left(-\frac{t'}{RC}\right)$$

$$Q' = V_0 C\left[1 - \exp\left(-\frac{t'}{RC}\right)\right]$$

$$Q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Nell'ultimo passaggio siamo passati da Q' e t' a Q e t, senza perdita di generalità. Una volta nota la carica $Q(t)$ possiamo trovare la corrente $I(t)$ in funzione del tempo, facendo la derivata dQ/dt:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\left[V_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right)\right]$$

$$I(t) = V_0 C\,\frac{e^{-t/RC}}{RC} = \frac{V_0}{R}e^{-t/RC}$$

Punto 3): La potenza istantanea erogata da un generatore è il prodotto della tensione ai capi del generatore per la corrente che attraversa il generatore, pertanto:

$$W_G = V_0 I(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-t/RC}$$

Per ottenere tutta l'energia erogata dal generatore durante il processo di carica basta integrare sul tempo t fra 0 e +∞:

$$U_G = \int_0^\infty W_G\,dt$$

$$U_G = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R}e^{-t/RC}dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-t/RC}dt$$

$$U_G = \frac{V_0^2}{R}\left[-RCe^{-t/RC}\right]_0^\infty$$

$$U_G = \frac{V_0^2}{R}RC = CV_0^2$$

Punto 4): La potenza istantanea dissipata su R per effetto Joule è data da:

$$W_R = RI^2(t) = \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/RC}$$

Si noti che all'esponente della funzione esponenziale è ora presente un fattore 2 dovuto al fatto che la corrente $I(t)$ è stata elevata al quadrato, $I^2(t)$. Come prima, tutta l'energia dissipata per effetto Joule si ottiene integrando nel tempo la potenza istantanea W_R:

$$U_R = \int_0^\infty W_R\,dt$$

$$U_R = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/RC}dt = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/RC}dt$$

$$U_R = \frac{V_0^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-2t/RC}\right]_0^\infty$$

$$U_R = \frac{V_0^2}{R}\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

Come si vede dai risultati ottenuti per U_R, U_C (punto 1) e U_G (punto 3) tutta l'energia erogata dal generatore (U_G=CV_0^2) è ripartita in parti uguali fra energia accumulata nel condensatore (U_C=½CV_0^2) e energia dissipata per effetto Joule (U_R=½CV_0^2).

Soluzione problema 2

Punto 1): Dato un elemento conduttore di cui si conosce resistività elettrica ρ_R, sezione S e lunghezza l, la corrispondente resistenza elettrica R è data dalla seguente formula:

$$R = \frac{\rho_R l}{S}$$

Per cui le resistenze delle tre semicirconferenze sono date da:

$$R_1 = \frac{\rho_R \pi d}{S} = \frac{\rho_R \pi a}{S}$$

$$R_2 = \frac{\rho_R \pi D}{S} = 3\frac{\rho_R \pi a}{S}$$

$$R_3 = \frac{\rho_R \pi D}{2S} = \frac{3}{2}\frac{\rho_R \pi a}{S}$$

Punto 2): Dal risultato del punto 1) si vede che valgono le seguenti uguaglianze:

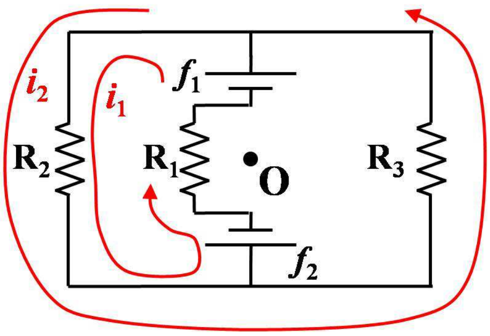
$$R_2 = 3R_1$$

$$R_3 = \frac{3}{2}R_1$$

Applichiamo ora il metodo delle maglie al circuito rappresentato in figura, che è equivalente a quello dato nel problema con le semicirconferenze. Scegliendo le 2 maglie e le correnti i_1 e i_2 come in figura si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = (R_1 + R_2)i_1 + R_2 i_2 \\ 0 = R_2 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 \end{cases}$$

Sostituendo le espressioni di f_1 e f_2 date dal problema e quelle di R_2 e R_3 appena riportate, si ottiene che:



$$\begin{cases} -V_0 = 4R_1 i_1 + 3R_1 i_2 \\ 0 = 3R_1 i_1 + \frac{9}{2}R_1 i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 = 4R_1 i_1 + 3R_1 i_2 \\ i_1 = -\frac{3}{2}i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -V_0 = -6R_1 i_2 + 3R_1 i_2 \\ i_1 = -\frac{3}{2}i_2 \end{cases}$$

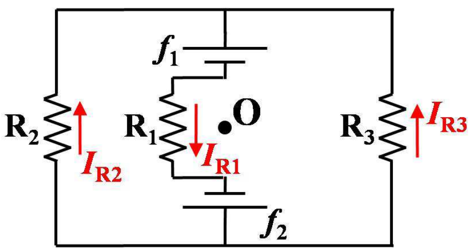
$$\begin{cases} i_2 = \frac{V_0}{3R_1} \\ i_1 = -\frac{V_0}{2R_1} \end{cases}$$

Dato che i_1 è negativa, la corrente nella maglia 1 gira in verso opposto a quello scelto in figura. Quindi sulla resistenza R_1 circola solo la corrente $|i_1|$ con direzione dall'alto verso il basso in figura; sulla resistenza R_3 circola solo la corrente $|i_2|$ con direzione dal basso verso l'alto in figura; infine sulla resistenza R_2 circola la corrente $|i_1|–|i_2|$ dal basso verso l'alto. Riassumendo abbiamo la seguente situazione per le correnti sulle resistenze, dove indichiamo verso orario e antiorario rispetto al centro O:

$$\left|I_{R1}\right| = \left|i_1\right| = \frac{V_0}{2R_1} \quad \text{in senso antiorario, rispetto ad O, su } R_1$$

$$\left|I_{R2}\right| = \left|i_1\right| - \left|i_2\right| = \frac{V_0}{6R_1} \quad \text{in senso orario, rispetto ad O, su } R_2$$

$$\left|I_{R3}\right| = \left|i_2\right| = \frac{V_0}{3R_1} \quad \text{in senso antiorario, rispetto ad O, su } R_3$$



Sostituendo l'espressione di R_1 trovata al punto 1) si ottengono le seguenti espressioni per le correnti:

$$I_{R1} = \frac{V_0 S}{2\rho_R \pi a} \quad \text{in senso antiorario, rispetto ad O, su } R_1$$

$$I_{R2} = \frac{V_0 S}{6\rho_R \pi a} \quad \text{in senso orario, rispetto ad O, su } R_2$$

$$I_{R3} = \frac{V_0 S}{3\rho_R \pi a} \quad \text{in senso antiorario, rispetto ad O, su } R_3$$

Punto 3): Note le correnti sulle spire semicircolari, possiamo calcolare il campo magnetico che ciascuna di esse genera nel centro della spira. Per una spira circolare di raggio r percorsa da corrente I, il campo magnetico al centro della spira è dato da:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

diretto verso l'alto se la corrente I circola in senso antiorario. Nel caso di metà spira il modulo di B va dimezzato:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4r}$$

Questo risultato per la spira semicircolare è vero solo per il campo magnetico al centro di essa; invece nel caso di un altro punto generico dell'asse passante per il centro della spira non è sufficiente dimezzare il modulo del campo B per avere il risultato corretto.

Calcoliamo i contributi dei campi magnetici generati dalle spire semicircolari R_1, R_2 e R_3, usando il segno positivo (+) per i campi diretti verso l'alto in figura, e il segno negativo (–) per quelli diretti verso il basso:

$$B_1 = +\frac{\mu_0 I_{R1}}{4d} = +\frac{\mu_0 V_0 S}{8\pi\rho_R a^2}$$

$$B_2 = -\frac{\mu_0 I_{R2}}{4D} = -\frac{\mu_0 V_0 S}{72\pi\rho_R a^2}$$

$$B_3 = +\frac{\mu_0 I_{R3}}{4D} = +\frac{\mu_0 V_0 S}{36\pi\rho_R a^2}$$

Dato che i campi magnetici sono tutti perpendicolari al piano del circuito, il campo magnetico totale è semplicemente la somma algebrica dei 3 campi appena determinati:

$$B_{TOT} = B_1 + B_2 + B_3$$

$$B_{TOT} = \frac{\mu_0 V_0 S}{\pi\rho_R a^2}\left(+\frac{1}{8} - \frac{1}{72} + \frac{1}{36}\right) = +\frac{5}{36}\frac{\mu_0 V_0 S}{\pi\rho_R a^2}$$

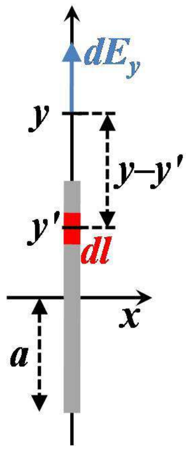
Si noti infine che i tratti di filo che uniscono R_1, R_2 e R_3 nel circuito non danno contributo al campo magnetico nel centro O perché si trovano su una retta passante per O (di coseguenza il prodotto vettoriale al numeratore della legge di Biot-Savart, $\boldsymbol{\Delta l}\times\boldsymbol{\Delta r}$, è sempre nullo perché $\boldsymbol{\Delta l}$ e $\boldsymbol{\Delta r}$ sono paralleli).

Soluzione problema 3

Punto 1): Dividiamo la barretta in tanti elementi infinitesimi *dl*. Dato che la densità di carica λ è positiva, ciascuno di questi elementi genera nello spazio un campo elettrico radiale uscente (come piccole cariche puntiformi positive), e quindi su un punto dell'asse verticale (x=0) ciascuno di essi genera un campo elettrico parallelo all'asse y. Sommando tutti questi contributi si ottiene allora un campo elettrico che ha componente verticale non nulla, $E_y \neq 0$, e componente orizzontale nulla, $E_x=0$. Inoltre il campo elettrico è diretto verso l'alto per $y>+a$, e verso il basso per $y<-a$.

Considerando un punto dell'asse y che si trova a distanza y dall'origine, e detta invece y' la distanza dall'origine a cui si trova l'elemento infinitesimo *dl* della barretta (vedi figura), la legge di Coulomb per il campo elettrico infinitesimo dE_y ha la seguente espressione:

$$dE_y = \frac{\lambda dy'}{4\pi\varepsilon_0 (y-y')^2}$$



Nella precedente espressione si è imposto $dl=dy'$, dato che abbiamo nominato y' la coordinata che indica la posizione del tratto infinitesimo *dl*. Integrando su tutta la sbarretta, fra $y'=-a$ e $y'=+a$, si ottiene che:

$$E_y = \int_{-a}^{+a} dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{+a}\frac{dy'}{(y-y')^2}$$

Si noti che nell'integrale la variabile di integrazione è y', mentre y è un parametro che non varia con y' ed è quindi costante ai fini dell'integrazione (y è infatti la posizione in cui stiamo calcolando il campo elettrico lungo l'asse verticale):

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{+a}\frac{dy'}{(y-y')^2}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{y-y'}\right]_{y'=-a}^{y'=+a}$$

$$E_y(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y-a}-\frac{1}{y+a}\right)$$

$$E_y(y) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a}{y^2-a^2}\right)$$

Si ottengono quindi le seguenti espressioni per le componenti del campo elettrico, E_x e E_y, calcolate in punti dell'asse verticale (x=0):

$$E_x \equiv 0$$

$$E_y(y) = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 (y^2-a^2)} \quad \text{per } y>+a$$

Si noti che per $y<-a$, il modulo del campo elettrico E_y è lo stesso di quello appena trovato, ma il campo è diretto verso il basso (quindi $E_y<0$). Un'unica espressione matematica che tenga conto di entrambe le regioni, $y>+a$ e $y<-a$, potrebbe essere la seguente:

$$E_y(y) = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 (y^2-a^2)}\frac{y}{|y|} \quad \text{per } y<-a \text{ e } y>+a$$

Punto 2): Per i punti dell'ascissa (y=0) metà sbarretta si trova al di sopra dell'asse x e metà sbarretta al di sotto. Questo significa che per ogni tratto infinitesimo $dl=dy$ lungo la sbarretta possiamo trovare un tratto *dl* infinitesimo simmetricamente opposto rispetto all'asse x. Questi due tratti infinitesimi generano sui punti dell'asse x campi elettrici infinitesimi $d\mathbf{E}$ uguali in modulo (perché sono alla stessa distanza dai punti dell'asse x), con componenti orizzontali dE_x uguali e concordi (verso destra per i punti del semiasse positivo perché la densità di carica λ è positiva), e con componenti verticali dE_y uguali ma opposte. Questo significa che sommando (integrando) tutti i contributi degli elementi infinitesimi dl della sbarretta, il campo elettrico verticale sarà nullo, E_y=0, mentre avremo campo elettrico orizzontale non nullo, $E_x \neq 0$.

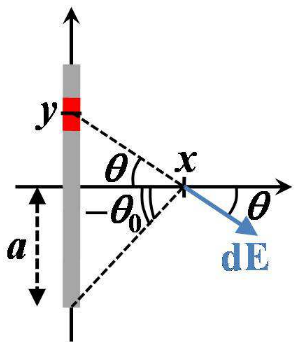
Applichiamo prima di tutto la legge di Coulomb per calcolare il modulo del campo elettrico infinitesimo, $|d\mathbf{E}|$, prodotto da un elemento infinitesimo $dl=dy$ su un punto dell'ascissa a distanza x dall'origine:

$$|\mathbf{dE}| = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

$$dE = \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + y^2)}$$

Di questo contributo infinitesimo di campo elettrico dobbiamo calcolare la componente lungo x:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dy}{(x^2 + y^2)} \cos\theta$$



dove l'angolo θ è quello rappresentato in figura.

Applicando le seguenti sostituzioni nell'espressione di dE_x:

$$y = x\tan\theta \rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \frac{x}{\cos^2\theta} \rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$x = \sqrt{x^2 + y^2}\cos\theta \rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

si ottiene che:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x d\theta}{\cos^2\theta} \frac{\cos^2\theta}{x^2} \cos\theta$$

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x} \cos\theta d\theta$$

Questo contributo infinitesimo dE_x va sommato (integrato) su tutta la sbarretta per ottenere il campo totale E_x. Facendo riferimento alla figura si vede che per considerare tutta la sbarretta l'angolo θ deve variare fra $-\theta_0$, per l'estremità in basso della sbarretta, e $+\theta_0$ per l'estremità in alto:

$$E_x = \int_{-\theta 0}^{+\theta 0} dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \int_{-\theta 0}^{+\theta 0} \cos\theta d\theta$$

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} [\sin\theta]_{-\theta 0}^{+\theta 0} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} 2\sin\theta_0$$

$$E_x = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x} \sin\theta_0$$

Nell'integrazione la variabile x è stata portata fuori dal segno di integrale perché non varia con θ, dato che stiamo calcolando il campo elettrico ad una distanza x dalla sbarretta. Dalla figura si può vedere che $\sin\theta_0$ è dato da:

$$\sin\theta_0 = \frac{a}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

da cui segue che le componenti cartesiane del campo elettrico, E_x e E_y, sui punti dell'asse x sono date da:

$$E_x(x) = \frac{\lambda a}{2\pi\varepsilon_0 x (x^2 + a^2)^{1/2}}$$

$$E_y \equiv 0$$

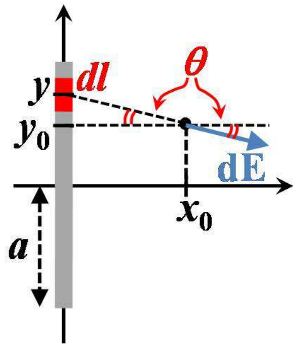
Punto 3): Come nei punti precedenti dividiamo la barretta in tratti infinitesimi $dl=dy$, ciascuno dei quali si trova nella posizione (0, y), e calcoliamo il modulo del campo elettrico $|\mathbf{dE}|$ nella posizione x_0,y_0:

$$|\mathbf{dE}| = \frac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + (y - y_0)^2\right]}$$

Dalla figura si vede che $x_0^2+(y-y_0)^2$ è la distanza che c'è fra il tratto infinitesimo dy di barretta, in posizione (0, y), e la posizione (x_0,y_0) in cui stiamo calcolando il campo elettrico.

Dalla precedente espressione calcoliamo la componente lungo x (dE_x) e quella lungo y (dE_y); facendo riferimento alla figura dobbiamo moltiplicare $|\mathbf{dE}|$ rispettivamente per $\cos\theta$ e per $-\sin\theta$ per avere le due componenti:

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + (y - y_0)^2\right]}\cos\theta \\[2ex] dE_y = -\dfrac{\lambda dy}{4\pi\varepsilon_0\left[x_0^2 + (y - y_0)^2\right]}\sin\theta \end{cases}$$



Sempre facendo riferimento alla figura osserviamo che:

$$x_0^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$y - y_0 = x_0 \tan\theta \rightarrow y = y_0 + x_0 \tan\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{x_0}{\cos^2\theta} \rightarrow dy = \frac{x_0 d\theta}{\cos^2\theta}$$

Sostituendo queste ultime uguaglianze nelle espressioni per dE_x e dE_y si ottiene che:

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x_0 d\theta}{r^2\cos^2\theta}\cos\theta \\[2ex] dE_y = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x_0 d\theta}{r^2\cos^2\theta}\sin\theta \end{cases}$$

Sempre dalla figura si può vedere che $r\cdot\cos\theta=x_0$, per cui le ultime due espressioni diventano:

$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x_0 d\theta}{x_0^2}\cos\theta \\[2ex] dE_y = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{x_0 d\theta}{x_0^2}\sin\theta \end{cases}$$

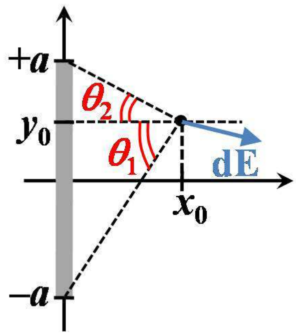
$$\begin{cases} dE_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\cos\theta d\theta \\[2ex] dE_y = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\sin\theta d\theta \end{cases}$$

Sommando su tutti gli elementi infinitesimi della barretta, ovvero integrando su $d\theta$, si ottiene che:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\displaystyle\int_{\theta 1}^{\theta 2}\cos\theta d\theta \\[2ex] E_y = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\displaystyle\int_{\theta 1}^{\theta 2}\sin\theta d\theta \end{cases}$$

dove θ_1 e θ_2 sono rispettivamente l'angolo sotto cui si vede l'estremità inferiore della barretta dalla posizione (x_0,y_0), e l'angolo sotto cui si vede l'estremità superiore sempre dalla posizione (x_0,y_0).
Risolvendo gli integrali si ottiene che:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\left[\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right] \\ E_y = -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\left[-\cos\theta_2 + \cos\theta_1\right] \end{cases}$$



Facendo riferimento alla figura si vede che sono valide le seguenti esperssioni:

$$\begin{cases} \sin\theta_2 = \dfrac{a - y_0}{\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2}}; \quad \cos\theta_2 = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (a - y_0)^2}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-a - y_0}{\sqrt{x_0^2 + (a + y_0)^2}}; \quad \cos\theta_1 = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + (a + y_0)^2}} \end{cases}$$

Sostituendo i valori dati dal problema, x_0=a e y_0=a/2, si ottiene che:

$$\begin{cases} \sin\theta_2 = \dfrac{a/2}{\sqrt{a^2 + a^2/4}}; \quad \cos\theta_2 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + a^2/4}} \\ \sin\theta_1 = \dfrac{-3a/2}{\sqrt{a^2 + 9a^2/4}}; \quad \cos\theta_1 = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + 9a^2/4}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\theta_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}; \quad \cos\theta_2 = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta_1 = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}; \quad \cos\theta_1 = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

Sostituiamo i valori trovati per sinθ_2, cosθ_2, sinθ_1 e cosθ_1 nelle espressioni di E_x e E_y, e ricordando che x_0=a:

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right] \\ E_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x_0}\left[\dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{\sqrt{13} + 3\sqrt{5}}{\sqrt{65}} \approx 1.28\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \\ E_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{65}} \approx 0.34\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{cases}$$