Risultati esame scritto Fisica 1 - 06/02/2017
orali: 14/02/2017 alle ore 10.30 presso aula S

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
115003	18	ammesso
211071	11	
115293	19	ammesso
210956	nc	
210957	30	ammesso
211226	nc	
211213	12	
120819*	12	
118535	19	ammesso
210984	29	ammesso
212168	15	
118461	12	
212725	nc	
207541	20	ammesso
210990	22	ammesso
211011	12	
208440	nc	
210931*	12	
209761	18	ammesso
211278	nc	
115162	17	ammesso
118527*	15	
114952	18	ammesso
212574	nc	
115213	21	ammesso
114916	nc	
210935	22	ammesso
211576	17	ammesso
114899	19	ammesso
207306	10	
209614	19	ammesso
211214	nc	
209951	12	
211566	nc	
209184	nc	
211062	22	ammesso
213074	nc	
210955*	nc	
108488	17	ammesso
212120	12	

211262	14	
211652	nc	
207689	24	ammesso
211044	nc	
115056	nc	
207746	19	ammesso
211019	19	ammesso
118571*	12	
118937	nc	
210960	nc	
211748*	nc	
114910	10	
120823*	11	
107152	17	ammesso
210951	25	ammesso
210968	11	
207303	24	ammesso
207650	nc	

nc=non classificato (< 10)

Esame di Fisica 1

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 06/02/2017

Problema 1

Sia dato un volume V_1 di gas perfetto a temperatura T_1=600K che compie un'espansione isoterma tale da triplicare il proprio volume iniziale. Successivamente il gas subisce una compressione isobara che lo riporta al volume iniziale V_1. Supponendo che le trasformazioni siano reversibili, disegnare nel piano p,V un grafico qualitativo delle due trasformazioni e calcolare la temperatura finale del gas.

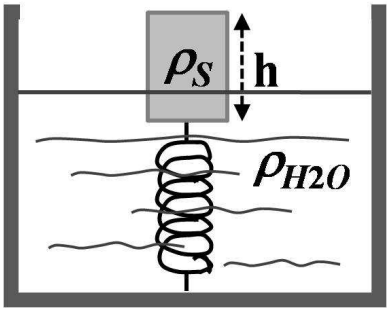
Problema 2

Sia dato un recipiente molto ampio che contiene acqua (densità dell'acqua ρ_{H2O}=1.0·10^{3}kg/m^3) all'interno del quale si trova un blocco di sughero (densità del sughero ρ_S=0.25·10^{3}kg/m^3) avente sezione S=0.05m^2 e altezza h=0.35m. Il sughero è ancorato al fondo del recipiente mediante una molla con costante elastica k=500N/m (vedi figura). Non sono presenti forze dissipative.

1) Sapendo che il sughero è all'equilibrio quando la molla è allungata di una quantità Δl=0.05m, determinare qual è lo spessore h' di sughero immerso nell'acqua.

2) Dalla posizione di equilibrio determinata al punto 1), il sughero viene spostato verso l'alto e poi rilasciato; dimostrare che il moto che ne segue è di tipo armonico e calcolarne la frequenza f.

3) Si determini l'ampiezza A di oscillazione del moto, sapendo che il sughero viene rilasciato con velocità nulla e che attraversa la posizione di equilibrio con velocità v_1=1.5m/s.



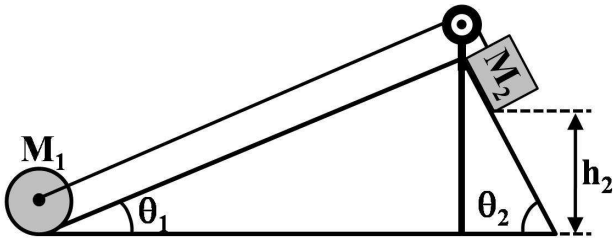
Problema 3

Siano dati due piani inclinati uniti ed opposti, come rappresentato in figura, che formano angoli con il piano orizzontale rispettivamente pari a θ_1=30° (quello a sinistra nella figura) e θ_2=60° (quello a destra). In fondo al piano inclinato di sinistra si trova un disco di massa M_1=5.0kg e raggio R (non noto), avente un perno passante per il centro di massa e intorno al quale il disco può ruotare senza attrito. Il perno è legato mediante una fune ed una carrucola ad un corpo puntiforme di massa M_2=10.0kg, posto sulla sommità del piano inclinato di destra. La carrucola ha massa trascurabile e la fune è inestensibile e di massa trascurabile. Tutto il sistema è inizialmente in quiete e la massa M_2 si trova ad una quota iniziale h_2=7.0m. Fra il corpo di massa M_2 e il piano inclinato di destra è presente attrito con coefficiente μ=0.73.

1) Si determini l'accelerazione a del sistema e la tensione T della fune, supponendo che il moto del disco sia di puro rotolamento e sapendo che il momento di inerzia del disco per rotazioni intorno al perno è pari a I=½M_1R^2.

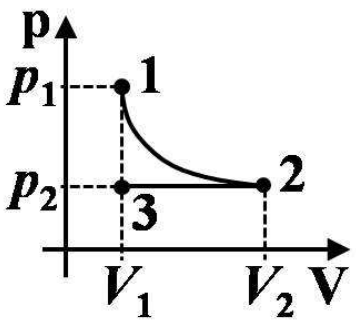
2) Si determini il rapporto W_{ATT}/E_0 fra energia dissipata dalla forza di attrito quando la massa M_2 arriva in fondo al piano inclinato di destra e energia iniziale del sistema. Tale rapporto dipende dallo spazio percorso complessivamente lungo il piano inclinato?

3) Si determini il rapporto K_{ROT}/E_0 fra energia cinetica rotazionale, posseduta dal disco M_1 quando la massa M_2 arriva in fondo al piano inclinato, e energia iniziale del sistema; tale rapporto dipende dallo spazio percorso complessivamente lungo il piano inclinato?



Soluzione problema 1

In figura è rappresentata la sequenza delle due trasformazione nel piano *p*,*V*. La trasformazione da 1 a 2 è un'espansione isoterma a temperatura T_1=600K, mentre la trasformazione da 2 a 3 è una compressione isobara che riporta il gas al volume iniziale V_1.



Per la compressione isobara da 2 a 3 vale la seguente relazione:

$$V_3 = V_2 \frac{T_3}{T_2}$$

da cui si ottiene che:

$$T_3 = T_2 \frac{V_3}{V_2} = T_1 \frac{V_1}{V_2}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che T_2=T_1 e V_3=V_1. Dato che il rapporto V_1/V_2 è noto si ottiene che:

$$T_3 = \frac{1}{3} T_1 = 200\text{K}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Tutte le forze che agisono sul sughero sono dirette verticalmente in figura, e all'equilibrio esse devono avere risultante nulla. Le forze che spingono il sughero verso il basso sono la forza peso e la forza elastica della molla (visto che la molla all'equilibrio è allungata di Δl), mentre l'unica forza che spinge verso l'alto è la spinta di Archimede. Scegliendo come direzione positiva per l'asse *y* quella diretta verso l'alto, il II principio della dinamica è il seguente:

$$ma_y = \rho_{H2O} Sh'g - \rho_S Shg - k\Delta l$$

All'equilibrio si ha a_y=0, che imposta nella precedente equazione permette di ottenere lo spessore *h'* di sughero immerso in acqua:

$$0 = \rho_{H2O} Sh'g - \rho_S Shg - k\Delta l$$

$$\rho_{H2O} Sh'g = \rho_S Shg + k\Delta l$$

$$h' = \frac{\rho_S Shg + k\Delta l}{\rho_{H2O} Sg} \approx 0.14\text{m}$$

Punto 2): Dalla situazione del punto 1), se si sposta il sughero verso l'alto di una quantità genercia pari a *y*, lo spessore immerso sarà più piccolo mentre l'allungamento della molla sarà maggiore. Pertanto l'equazione del II principio della dinamica diventa:

$$ma_y = \rho_{H2O} S(h' - y)g - \rho_S Shg - k(\Delta l + y)$$

Dato che a_y è la derivata seconda della posizione *y* rispetto al tempo *t*, si ottiene che:

$$m\frac{d^2 y}{dt^2} = \rho_{H2O} Sh'g - \rho_{H2O} Syg - \rho_S Shg - k\Delta l - ky$$

$$\rho_S Sh\frac{d^2 y}{dt^2} = \rho_{H2O} Sh'g - \rho_S Shg - k\Delta l - \rho_{H2O} Syg - ky$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo scritto la massa m del sughero mediante la sua densità ρ_S e il suo volume $S{\cdot}h$. Si noti inoltre che nell'ultima equazione i primi 3 termini del membro a destra non sono altro che i termini della situazione di equilibrio del punto 1), la cui somma è pari a zero. Pertanto l'ultima equazione diventa:

$$\rho_S Sh\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_{H2O}Syg - ky$$

$$\rho_S Sh\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\rho_{H2O}Sg + k\right)y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\rho_{H2O}Sg + k}{\rho_S Sh}y = 0$$

L'ultima equazione scritta è l'equazione differenziale di un moto armonico per la coordinata y, pertanto il moto del sughero dopo lo spostamento verso l'alto è un'oscillazione armonica. Confrontando con l'equazione tipica di un moto armonico:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

si vede che la pulsazione ω è data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{H2O}Sg + k}{\rho_S Sh}}$$

Poiché la pulsazione ω e la frequenza f sono legate dalla relazione ω=2πf ne segue che la frequenza è data da:

$$f = \omega/2\pi$$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho_{H2O}Sg + k}{\rho_S Sh}} \approx 2.4\text{Hz}$$

Punto 3): Ripartendo dalla seguente equazione scritta al punto 2):

$$\rho_S Sh\frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_{H2O}Syg - ky$$

$$ma_y = -\left(\rho_{H2O}Sg + k\right)y$$

si vede che il sughero è sottoposto ad una forza di tipo elastica, come se fosse presente una molla con una costante elastica equivalente k_{eq} che agisce sulla massa m del sughero:

$$ma_y = -\left(\rho_{H2O}Sg + k\right)y$$

$$ma_y = -k_{eq}y \qquad \text{con } k_{eq} = \rho_{H2O}Sg + k$$

Allora per quanto riguarda l'energia valgono tutte le considerazioni utili nel caso di una molla di costante elastica k_{eq} e legata ad una massa m. In particolare il sistema possiede energia potenziale U_{el} di tipo elastico pari a:

$$U_{el} = \frac{1}{2}k_{eq}\left(\Delta y\right)^2$$

dove Δy è lo spostamento dalla posizione di equilibrio. Non essendo presenti forze dissipative, possiamo scrivere la conservazione dell'energia meccanica fra l'istante t_0 in cui il sughero viene rilasciato (dove l'energia è tutta potenziale U_{el}) e l'istante t_1 in cui attraversa la posizione di equilibrio (dove l'energia è tutta cinetica K):

$$E_0 = U_{el} = \frac{1}{2} k_{eq} A^2$$

$$E_1 = K = \frac{1}{2} m v^2$$

dove A è la massima deviazione dalla posizione di equilibrio e costituisce quindi l'ampiezza del moto oscillatorio. Imponendo la conservazione dell'energia si ottiene l'ampiezza di oscillazione A:

$$E_0 = E_1$$

$$\frac{1}{2} k_{eq} A^2 = \frac{1}{2} m v^2$$

$$A = \sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} v$$

$$A = \sqrt{\frac{\rho_S S h}{\rho_{H2O} S g + k}} v \approx 0.1\text{m}$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Poiché la fune è inestensibile, i due corpi si muovono in maniera solidale con un'unica accelerazione a, ciascuno parallelamente al rispettivo piano inclinato. Si prenda come asse positivo parallelo al piano inclianto quello diretto verso l'alto per il piano inclinato di sinistra (con angolo θ_1), e quello diretto verso il basso per il piano inclinato di destra (con angolo θ_2). Il II principio della dinamica lungo tale asse parallelo ai piani inclinati diventa:

$$\begin{cases} M_2 a = M_2 g \sin\theta_2 - T - \mu M_2 g \cos\theta_2 \\ M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - F_{ATT,1} \end{cases}$$

dove la forza $F_{ATT,1}$ è la forza di attrito che agisce sul punto di contatto fra il disco e il piano inclinato. A tale proposito si osservi che il moto del disco è di puro rotolamento (come affermato nel testo del problema), e ciò può avvenire solo in presenza di attrito fra il disco e il piano inclinato nel punto di contatto.

Per il disco dobbiamo scrivere il sistema che governa il moto di puro rotolamento:

$$\begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - F_{ATT,1} \\ I\alpha = F_{ATT,1} R \\ a = R\alpha \end{cases}$$

e svolgendo alcuni passaggi:

$$\begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - F_{ATT,1} \\ I\alpha = F_{ATT,1} R \\ \alpha = a/R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - F_{ATT,1} \\ I\, a/R = F_{ATT,1} R \\ \alpha = a/R \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - F_{ATT,1} \\ F_{ATT,1} = I\, a/R^2 \\ \alpha = a/R \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1 - I\, a/R^2 \\ F_{ATT,1} = I\, a/R^2 \\ \alpha = a/R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(M_1 + \dfrac{I}{R^2}\right) a = T - M_1 g \sin\theta_1 \\ F_{ATT,1} = I\, a/R^2 \\ \alpha = \dfrac{a}{R} \end{cases}$$

La prima equazione del sistema è valida per moto di puro rotolamento, e sostituendo I=½M_1R^2 si ottiene che:

$$\left(M_1 + \frac{1}{2}\frac{M_1 R^2}{R^2}\right) a = T - M_1 g \sin\theta_1$$

$$\frac{3}{2} M_1 a = T - M_1 g \sin\theta_1$$

Poiché nel primo sistema scritto come applicazione del II principio della dinamica si ha il termine M_1a a sinistra della seconda equazione, nell'ultima equazione appena scritta ricaviamo lo stesso termine M_1a moltiplicando ambo i membri per 2/3:

$$M_1 a = \frac{2}{3}\left(T - M_1 g \sin\theta_1\right)$$

Riscriviamo allora il II principio della dinamica per i due corpi, sostituendo all'equazione per M_1a quella appena trovata:

$$\begin{cases} M_2 a = M_2 g \sin\theta_2 - T - \mu M_2 g \cos\theta_2 \\ M_1 a = \dfrac{2}{3}\left(T - M_1 g \sin\theta_1\right) \end{cases}$$

In questo sistema abbiamo due equazioni e due incognite, a e T. Moltiplicando ambo i membri della prima equazione per 2/3 si ottiene che:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3} M_2 a = \dfrac{2}{3} M_2 g \sin\theta_2 - \dfrac{2}{3} T - \dfrac{2}{3} \mu M_2 g \cos\theta_2 \\ M_1 a = \dfrac{2}{3} T - \dfrac{2}{3} M_1 g \sin\theta_1 \end{cases}$$

e ora sommando membro a membro si semplifica la tensione T:

$$\left(\frac{2}{3} M_2 + M_1\right) a = \frac{2}{3} M_2 g \sin\theta_2 - \frac{2}{3} M_1 g \sin\theta_1 - \frac{2}{3} \mu M_2 g \cos\theta_2$$

$$\left(2M_2 + 3M_1\right) a = 2M_2 g \sin\theta_2 - 2M_1 g \sin\theta_1 - 2\mu M_2 g \cos\theta_2$$

$$a = 2g\frac{M_2\sin\theta_2 - M_1\sin\theta_1 - \mu M_2\cos\theta_2}{2M_2 + 3M_1} \approx 1.4\text{m/s}^2$$

Sostituendo il valore di a appena trovato nella seconda equazione del sistema si ottiene la tensione T:

$$M_1 a = \frac{2}{3}T - \frac{2}{3}M_1 g\sin\theta_1$$

$$T = \frac{3}{2}M_1 a + M_1 g\sin\theta_1 \approx 35\text{N}$$

Punto 2): Prima di tutto calcoliamo l'energia iniziale E_0 del sistema. Dato che entrambi i corpi partono dallo stato di quiete, l'energia cinetica è inizialmente nulla. Per quanto riguarda l'energia potenziale legata all'accelerazione di gravità g, solo quella del corpo M_2 è diversa da zero, mentre il disco si trova nel punto più basso dove poniamo energia potenziale pari a zero.
Quindi l'energia inziale E_0 è data da:

$$E_0 = U_{2,i} = M_2 g h_2 \approx 686\text{J}$$

Dato che nel moto di puro rotolamento l'attrito non compie lavoro, l'unico attrito che dissipa energia è quello che agisce sul corpo M_2. Il lavoro dissipato da questa forza di attrito è pari a:

$$W_{ATT} = F_{ATT,2}\cdot l$$

$$W_{ATT} = \mu M_2 g\cos\theta_2\frac{h_2}{\sin\theta_2} \approx 289\text{J}$$

dove $l=h_2/\sin\theta_2$ è lo spazio percorso parallelamente al piano inclinato nell'istante in cui il corpo M_2 arriva a terra.
Facendo il rapporto W_{ATT}/E_0 si ottiene che:

$$\frac{W_{ATT}}{E_0} = \frac{\mu M_2 g h_2\cot\theta_2}{M_2 g h_2}$$

$$\frac{W_{ATT}}{E_0} = \mu\cot\theta_2 \approx 0.42 = 42\%$$

Come vediamo dalle ultime formule, il rapporto W_{ATT}/E_0 non dipende dallo spazio percorso.

Punto 3): Come nel punto 2) l'energia iniziale del sistema è data da:

$$E_0 = U_{2,i} = M_2 g h_2 \approx 686\text{J}$$

L'energia cinetica rotazionale K_{ROT} è invece data genericamente da:

$$K_{ROT} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove ω è la velocità angolare. Nel moto di puro rotolamento si ha che:

$$v = R\omega$$

con v pari alla velocità di traslazione del centro di massa. Dato che M_1 e M_2 si muovono con la stessa accelerazione e velocità, il valore di v posseduto da M_1 sarà uguale a quello di M_2. Alla fine del piano inclinato, la velocità v del corpo M_2 è data dalla seguente formula, dato che si tratta di un moto uniformemente accelerato (si ricordi che il corpo M_2 parte dallo stato di quiete e ha quindi velocità iniziale nulla):

$$v^2 = 2al$$

$$v^2 = 2a\frac{h_2}{\sin\theta_2}$$

L'energia cinetica rotazionale K_{ROT} diventa allora:

$$K_{ROT} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$K_{ROT} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_1R^2\right)\left(\frac{v^2}{R^2}\right) = \frac{1}{4}M_1v^2$$

$$K_{ROT} = \frac{1}{4}M_1\left(2a\frac{h_2}{\sin\theta_2}\right)$$

$$K_{ROT} = \frac{1}{2}M_1a\frac{h_2}{\sin\theta_2} \approx 28.3\text{J}$$

dove negli ultimi passaggi è stata sostituita l'espressione trovata per v^2.
Facendo il rapporto K_{ROT}/E_0 si ottiene che:

$$\frac{K_{ROT}}{E_0} = \frac{1}{2}\frac{M_1a\,h_2/\sin\theta_2}{M_2gh_2}$$

$$\frac{K_{ROT}}{E_0} = \frac{1}{2}\frac{M_1a}{M_2g\sin\theta_2} \approx 0.04 = 4\%$$

Dato che l'accelerazione a non dipende dallo spazio percorso, dall'ultima formula si vede che il rapporto K_{ROT}/E_0 non dipende dallo spazio percorso.