Risultati esame scritto Fisica 2 - 13/02/2017
orali: 21/02/2017 alle ore 11.00 presso aula C

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
114953	14	
114892	nc	
114952	11	
207571	nc	
207396	12	
112884	17	ammesso
114899	nc	
114889	21	ammesso
118463	nc	
118471	14	
114925	17	ammesso
112082	17	ammesso
207462	17	ammesso
200031	17	ammesso
207248	17	ammesso
207795	17	ammesso
118524	10	
208490	23	ammesso
118497	17	ammesso
112089	22	ammesso
115063	nc	

nc = non classificato (< 10)

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 13/02/2017

Problema 1

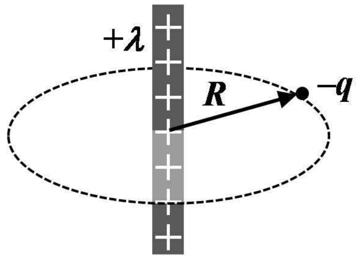
Sia dato un filo infinito avente sezione circolare di raggio a e con densità di carica per unità di lunghezza uniforme e pari a $+\lambda$ (carica positiva). Una particella di massa m e carica negativa $-|q|$ ruota su un piano perpendicolare al filo con moto circolare uniforme con raggio $R>a$, avente il centro del filo come centro dell'orbita (vedi figura).

1) Dimostrare che la velocità v della particella che ruota non dipende dal raggio R dell'orbita.

2) Determinare il potenziale elettrostatico generato dal filo infinito in funzione della distanza r dal filo, $V=V(r)$, per $r\geq a$ e imponendo $V=0$ per $r=a$.

3) Nel caso in cui la particella abbia raggio dell'orbita intorno al filo pari a $R=e^{0.5}\cdot a$ (dove e è il numero di Nepero), si determini l'energia totale E_{TOT} della particella, facendo uso dell'espressione di $V(r)$ determinata al punto precedente.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: λ, m, q, a, e in funzione della distanza r e delle costanti universali ove necessario].



Problema 2

Sia dato il circuito della figura, alimentato in ingresso da un generatore di tensione alternata di cui sono noti V_0 e ω, rispettivamente ampiezza e pulsazione della tensione oscillante. Sono inoltre noti i valori delle induttanze L_1 e L_2 e delle capacità C_1 e C_2.

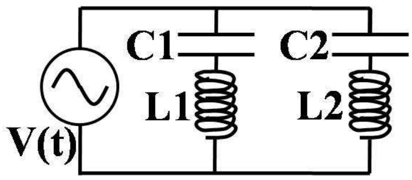
1) Determinare l'impedenza complessa totale, Z_{TOT}, del circuito e calcolarne il modulo, $Z_0=|Z_{TOT}|$, e la fase α.

2) Determinare l'ampiezza della corrente I_0 (in modulo) che circola nel circuito in funzione di ω, calcolare per quali valori ω_1 e ω_2 si ha risonanza, e per quale valore ω_A si ha antirisonanza.

3) Il quadrato ω_A^2 di antirisonanza si può esprimere come combinazione lineare dei quadrati delle ω_1^2 e ω_2^2 di risonanza: $\omega_A^2=b_1\omega_1^2+b_2\omega_2^2$ dove b_1 e b_2 sono coefficienti legati agli elementi del circuito. Determinare le espressioni di b_1 e b_2.

4) Determinare il valore del modulo di I_0 per $\omega\to 0$ e per $\omega\to\infty$, e rappresentare graficamente l'andamento del modulo di I_0 in funzione di ω.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: L_1, L_2, C_1, C_2, V_0, ω, e ove necessario delle costanti universali].



Problema 3

Sia dato un condensatore piano con piastre circolari di superficie S e collegato ad un generatore di tensione continua, la cui differenza di potenziale è pari a V_0. La dimensione laterale delle piastre è molto maggiore della distanza fra esse, ovvero siamo in condizioni di condensatore piano a piastre infinite. La distanza D fra le piastre è inizialmente pari a ½D_0, ma un'azione meccanica esterna muove una delle due piastre in modo che la distanza D dipenda dal tempo t secondo la formula $D(t)=D_0/[2+\sin(\omega t)]$, con la pulsazione ω parametro noto. Si assumano trascurabili tutte le resistenze elettriche e siano trascurabili gli effetti di bordo del condensatore.

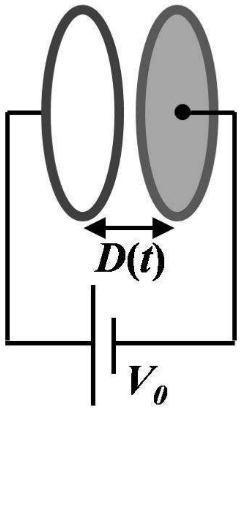
1) Determinare l'espressione della corrente, $I_G(t)$, che attraversa il generatore in funzione del tempo t.

2) Dimostrare che la corrente di spostamento all'interno del condensatore, $I_S(t)$, è uguale alla corrente $I_G(t)$ del punto 1).

3) Determinare l'espressione del campo magnetico B all'interno del condensatore, in funzione del tempo t e della distanza r dall'asse passante per i centri delle due piastre.

4) Determinare l'espressione della potenza istantanea erogata dal generatore, $W_G(t)$, e quella della potenza istantanea assorbita dal condensatore, $W_C(t)$, in funzione del tempo t; spiegare perché la potenza istantanea erogata dal generatore non coincide con la potenza istantanea assorbita dal condensatore.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri S, D_0, ω, V_0, e in funzione del tempo t, della distanza r e delle costanti universali ove necessario].



Soluzione problema 1

Punto 1): Applicando il teorema di Gauss si può dimostrare facilmente che il campo elettrico generato da un filo infinito con distribuzione di carica per unità di lunghezza uniforme pari a λ e con sezione circolare di raggio *a*, è lo stesso del filo infinito di sezione trascurabile per distanza $r \geq a$ dall'asse centrale del filo:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{per } r \geq a$$

Una particella di massa *m* e carica $-q$ che ruota di moto circolare uniforme sarà soggetta a forza centripeta, e siccome l'unica forza che agisce sulla particella è la forza attrattiva col filo, il II principio della dinamica diventa:

$$ma_c = qE(R)$$

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

dove $a_c = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta, e il campo elettrico $E(r)$ è stato valutato alla distanza *R* a cui si trova la particella.

Si ottiene allora la velocità *v* della particella per moto circolare uniforme:

$$mv^2 = \frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$v = \sqrt{\frac{\lambda q}{2m\pi\varepsilon_0}}$$

Come si vede l'ultima espressione non dipende dal raggio *R* dell'orbita circolare.

Punto 2): Poiché il filo si estende adistanza ∞, per calcolare il potenziale elettrostatico non possiamo utilizzare la formula tipica per il potenziale generato da una carica infinitesima *dq*:

$$dV(r) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

e integrare poi su tutte le cariche infinitesime del filo, perché in tale formula si assume il potenziale $V(r)=0$ per $r \to \infty$. E in questo caso tale assunzione non è ammissibile perché a distanza ∞ abbiamo una grande quantità di carica dato che si tratta di filo infinito.

Per poter calcolare il potenziale elettrostatico è allora necessario ricorrere alla definizione operativa di potenziale elettrostatico, che è legato all'integrale di linea del campo elettrico $E(r)$:

$$V(r1) - V(r2) = \int_{r1}^{r2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl}$$

dove *r*1 e *r*2 sono due posizioni generiche, rispettivamente iniziale e finale di un cammino qualsiasi. Dato che il campo elettrico $E(r)$ è radiale a simmetria cilindrica, il prodotto scalare sotto il segno di integrale si riduce a:

$$V(r1) - V(r2) = \int_{r1}^{r2} E(r)dr$$

$$V(a) - V(r) = \int_{a}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r'} dr'$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo imposto $r1=a$ per il primo estremo di integrazione, e $r2=r$ per il secondo estremo di integrazione con *r* generica posizione a distanza *r* dal centro del filo. Per distinguere *r* del secondo estremo di integrazione dalla variabile di integrazione, quest'ultima è stata indicata come r'. Procedendo con l'integrale e tenendo conto che il testo richiede di imporre $V(a)=0$, si ottiene che:

$$V(a)-V(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_a^r\frac{dr'}{r'}$$

$$0-V(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$$V(r)=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)^{-1}$$

$$V(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{r}\right)$$

Punto 3): L'energia totale E_{TOT} della particella sarà data dalla somma di energia cinetica K e energia potenziale elettrostatica U:

$$E_{TOT}=K+U(R)$$

$$E_{TOT}=K-|q|V(R)$$

dove nell'ultimo passaggio si è tenuto conto del fatto che l'energia potenziale elettrostatica è data generalmente dal prodotto fra il valore della carica elettrica e il potenziale elettrostatico in cui essa è immersa. Utilizzando l'espressione di $V(r)$ determinata al punto 2), per l'energia potenziale si ottiene che:

$$U(R)=-\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{R}\right)$$

Per l'energia cinetica si osservi che al punto 1) è stata determinata la quantita mv^2, da cui segue la seguente espressione per K:

$$mv^2=\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}$$

Sommando i due termini K e $U(R)$ e imponendo $R=e^{0.5}\cdot a$ come richiesto dal problema si ha la seguente espressione per l'energia totale E_{TOT}:

$$E_{TOT}=K+U(R)$$

$$E_{TOT}=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}-\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{a}{e^{0.5}a}\right)$$

$$E_{TOT}=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}-\frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(e^{-1/2}\right)$$

$$E_{TOT}=\frac{\lambda q}{4\pi\varepsilon_0}+\frac{q\lambda}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Il circuito è composto da due impedenze in serie, Z_1 e Z_2, messe in parallelo fra loro rispetto al generatore di tensione alternata. L'impedenza Z_1 è data da:

$$Z_1 = j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1}$$

$$Z_1 = j\frac{\omega^2 C_1 L_1 - 1}{\omega C_1}$$

Analogamente per Z_2 abbiamo che:

$$Z_2 = j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2}$$

$$Z_2 = j\frac{\omega^2 C_2 L_2 - 1}{\omega C_2}$$

Il parallelo Z_{TOT} sarà dato dal parallelo di Z_1 e Z_2:

$$\frac{1}{Z_{TOT}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

$$\frac{1}{Z_{TOT}} = \frac{\omega C_1}{j(\omega^2 C_1 L_1 - 1)} + \frac{\omega C_2}{j(\omega^2 C_2 L_2 - 1)}$$

$$\frac{1}{Z_{TOT}} = \frac{\omega C_1(\omega^2 C_2 L_2 - 1) + \omega C_2(\omega^2 C_1 L_1 - 1)}{j(\omega^2 C_1 L_1 - 1)(\omega^2 C_2 L_2 - 1)}$$

$$Z_{TOT} = \frac{j(\omega^2 C_1 L_1 - 1)(\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\omega C_1(\omega^2 C_2 L_2 - 1) + \omega C_2(\omega^2 C_1 L_1 - 1)}$$

L'ultima espressione è un numero complesso con sola parte immaginaria. Ne cosegue che modulo $Z_0=|Z_{TOT}|$ e fase α sono dati da:

$$Z_0 = \frac{(\omega^2 C_1 L_1 - 1)(\omega^2 C_2 L_2 - 1)}{\omega C_1(\omega^2 C_2 L_2 - 1) + \omega C_2(\omega^2 C_1 L_1 - 1)}$$

$$\alpha = \pi/2$$

Punto 2): Per calcolare l'ampiezza I_0 della corrente oscillante nel circuito, applichiamo il metodo dei fasori e la legge di Ohm generalizzata ai fasori:

$$\vec{V} = Z_0 e^{j\alpha}\vec{I}$$

$$V_0 e^{j(\omega t+\phi)} = Z_0 e^{j\alpha} I_0 e^{j\omega t}$$

dove abbiamo imposto fase nulla per la corrente I, e fase pari a ϕ per la tensione V. Riarrangiando la precedente espressione si ottiene:

$$V_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} = Z_0 I_0 e^{j\alpha} e^{j\omega t}$$

$$V_0 e^{j\phi} = Z_0 I_0 e^{j\alpha}$$

$$V_0 = Z_0 I_0 \qquad \phi = \alpha = \pi/2$$

Ne segue la seguente espressione per l'ampiezza I_0 della corrente:

$$I_0 = \frac{V_0}{Z_0}$$

$$I_0 = \omega V_0 \frac{C_1\left(\omega^2 C_2 L_2 - 1\right) + C_2\left(\omega^2 C_1 L_1 - 1\right)}{\left(\omega^2 C_1 L_1 - 1\right)\left(\omega^2 C_2 L_2 - 1\right)}$$

Poiché si ha risonanza in un circuito quando il modulo dell'ampiezza I_0 è massima, dall'ultima espressione si vede che il massimo si ottiene per i valori di ω che annullano il denominatore:

$$\omega^2 C_1 L_1 - 1 = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}$$

$$\omega^2 C_2 L_2 - 1 = 0 \rightarrow \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{C_2 L_2}}$$

Dato che per $\omega=\omega_1$ e $\omega=\omega_2$ il numeratore è diverso da zero e il denominatore è pari a zero, per entrambi questi valori di ω l'ampiezza I_0 diverge a ∞ realizzando la condizione di risonanza. Si hanno allora due risonanze per $\omega=\omega_1$ e $\omega=\omega_2$; il fatto che l'ampiezza I_0 diverga a ∞ alla risonanza è dovuto all'assenza di elementi dissipativi (che rappresenta una condizione ideale, ma non reale).

La condizione di antirisonanza si ottiene quando il modulo dell'ampiezza I_0 è minimo. Ripartendo allora dall'espressione di I_0:

$$I_0 = \omega V_0 \frac{C_1\left(\omega^2 C_2 L_2 - 1\right) + C_2\left(\omega^2 C_1 L_1 - 1\right)}{\left(\omega^2 C_1 L_1 - 1\right)\left(\omega^2 C_2 L_2 - 1\right)}$$

vediamo che si ottiene il minimo del modulo di I_0 quando il numeratore, sempre in modulo, è minimo. A tal proposito raccogliamo il termine C_1C_2 nel numeratore:

$$C_1 C_2\left(\omega^2 L_2 - \frac{1}{C_2}\right) + C_2 C_1\left(\omega^2 L_1 - \frac{1}{C_1}\right) = C_1 C_2\left(\omega^2 L_2 - \frac{1}{C_2} + \omega^2 L_1 - \frac{1}{C_1}\right) =$$

$$= C_1 C_2\left[\omega^2\left(L_1 + L_2\right) - \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)\right]$$

Con questo riarrangiamento si vede chiaramente che esiste un valore di ω per il quale il numeratore è nullo (ovvero si ha il minimo del modulo di I_0) e in corrispondenza del quale si ha il valore ω_A di antirisonanza:

$$\omega_A^2\left(L_1 + L_2\right) - \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right) = 0$$

$$\omega_A^2\left(L_1 + L_2\right) = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}\right)$$

$$\omega_A^2 = \frac{1}{L_1 + L_2}\left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}\right)$$

$$\omega_A = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2}\left(\frac{C_1 + C_2}{L_1 + L_2}\right)}$$

Da quanto detto prima (ovvero dalle considerazioni fatte sul numeratore) si deduce immediatamente che $I_0=0$ per $\omega=\omega_A$.

Punto 3): Sostituiamo alla combinazione lineare data dal testo del problema le espressioni trovate per ω_A, ω_1 e ω_2:

$$\omega_A^2 = b_1\omega_1^2 + b_2\omega_2^2$$

$$\frac{1}{C_1C_2}\left(\frac{C_1+C_2}{L_1+L_2}\right) = \frac{b_1}{L_1C_1} + \frac{b_2}{L_2C_2}$$

$$\frac{1}{C_1C_2}\left(\frac{C_1+C_2}{L_1+L_2}\right) = \frac{L_2C_2b_1 + L_1C_1b_2}{L_1C_1L_2C_2}$$

$$\frac{C_1+C_2}{L_1+L_2} = \frac{L_2C_2b_1 + L_1C_1b_2}{L_1L_2}$$

A questo punto possiamo mettere in evidenza sia a destra che a sinistra i coefficeinti di C_1 e C_2:

$$\frac{1}{L_1+L_2}C_1 + \frac{1}{L_1+L_2}C_2 = \frac{b_2}{L_2}C_1 + \frac{b_1}{L_1}C_2$$

Ne segue allora che:

$$\frac{1}{L_1+L_2}C_1 = \frac{b_2}{L_2}C_1 \rightarrow b_2 = \frac{L_2}{L_1+L_2}$$

$$\frac{1}{L_1+L_2}C_2 = \frac{b_1}{L_1}C_2 \rightarrow b_1 = \frac{L_1}{L_1+L_2}$$

Risostituendo le espressioni trovate per b_1 e b_2 nella combinazione lineare per ω_A^2, si vede che:

$$\omega_A^2 = \frac{L_1}{L_1+L_2}\omega_1^2 + \frac{L_2}{L_1+L_2}\omega_2^2$$

$$\omega_A^2 = \frac{L_1\omega_1^2 + L_2\omega_2^2}{L_1+L_2}$$

In altri termini il quadrato della ω_A di antirisonanza è una media pesata, con le induttanze L_1 e L_2, dei quadrati delle ω_1 e ω_2 di risonanza. Questo in particolare ci dice anche che ω_A è compresa fra ω_1 e ω_2.

Punto 4): Studiamo ora l'andamento di I_0 per $\omega\rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega\rightarrow 0} I_0(\omega) = \lim_{\omega\rightarrow 0}\left[\omega V_0 \frac{C_1(\omega^2C_2L_2-1)+C_2(\omega^2C_1L_1-1)}{(\omega^2C_1L_1-1)(\omega^2C_2L_2-1)}\right]$$

$$\lim_{\omega\rightarrow 0} I_0(\omega) = \lim_{\omega\rightarrow 0}\left[-\omega V_0(C_1+C_2)\right] = 0$$

Invece per $\omega\rightarrow\infty$ si ha la seguente espressione:

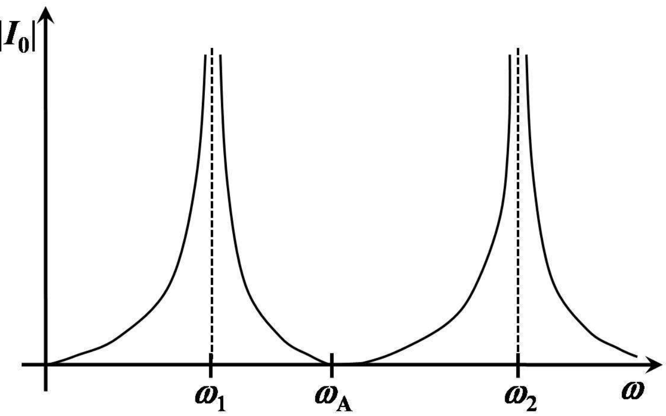
$$\lim_{\omega\rightarrow\infty} I_0(\omega) = \lim_{\omega\rightarrow\infty}\left[\omega V_0 \frac{C_1(\omega^2C_2L_2-1)+C_2(\omega^2C_1L_1-1)}{(\omega^2C_1L_1-1)(\omega^2C_2L_2-1)}\right]$$

$$\lim_{\omega\rightarrow\infty} I_0(\omega) = \lim_{\omega\rightarrow\infty}\left[\omega V_0 \frac{(\omega^2C_2C_1L_2)+(\omega^2C_2C_1L_1)}{\omega^4C_1L_1C_2L_2}\right]$$

$$\lim_{\omega\to\infty} I_0(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\left[V_0\,\frac{\omega^3 C_2 C_1 (L_2 + L_1)}{\omega^4 C_1 L_1 C_2 L_2}\right]$$

$$\lim_{\omega\to\infty} I_0(\omega) = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{V_0}{\omega}\,\frac{(L_2 + L_1)}{L_1 L_2}\right] = 0$$

Quindi il modulo dell'ampiezza I_0 tende a zero sia per $\omega\to 0$ che per $\omega\to\infty$. Qui di fianco è riportato un grafico di I_0 in funzione di ω che riassume anche i risultati dei punti precedenti.



Soluzione problema 3

Punto 1): Anche se le piastre sono circolari, siamo in presenza di un condensatore piano a facce infinite, la cui capacità C è data da:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{D}$$

dove D è la distanza fra le piastre. Siccome per D abbiamo una dipendenza dal tempo t, ne segue che anche la capacità C è funzione di t:

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{D(t)}$$

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{D_0}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

Dato che il condensatore è collegato ad un generatore di potenziale V_0 costante nel tempo, la differenza di potenziale ai capi di C è costante. Scrivendo l'equazione principale dei condensatori si ha che:

$$Q(t) = C(t) V_0$$

$$Q(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{D_0}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

ovvero la carica presente sulle piastre dipende dal tempo t. Ovviamente le differenze di carica dQ si muovono attraverso i fili e il generatore da una piastra all'altra. Ne segue che la corrente I_G che attraversa il generatore è pari alla derivata di $Q(t)$ rispetto al tempo t:

$$I_G(t) = \frac{dQ}{dt}$$

$$I_G(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{D_0}\,\frac{d}{dt}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

$$I_G(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{D_0}\,\omega\cos(\omega t)$$

Punto 2): La corrente di spostamento I_S fra le piastre del condensatore è data dalla seguente formula:

$$I_S(t) = \varepsilon_0\,\frac{d\Phi_E}{dt}$$

dove Φ_E è il flusso del campo elettrico *E* interno al condensatore attraverso la sezione *S* del condensatore stesso. Siccome all'interno di un condensatore piano il campo elettrico è uniforme nello spazio e perpendicolare alla sezione S, il flusso è semplicemente il prodotto del modulo di *E* per la superficie *S*:

$$\Phi_E = E \cdot S$$

Dato che sono note sia la differenza di potenziale V_0 ai capi del condensatore che la distanza $D(t)$ fra le piastre, possiamo scrivere un'espressione per il campo elettrico *E*:

$$E(t) = \frac{V_0}{D(t)}$$

$$E(t) = \frac{V_0}{D_0}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

da cui si ricava la seguente espressione per il flusso Φ_E:

$$\Phi_E(t) = E(t) \cdot S$$

$$\Phi_E(t) = \frac{V_0 S}{D_0}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

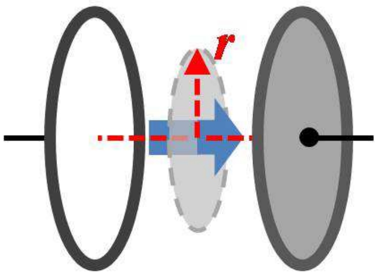
Da quest'ultimo risultato possiamo ricavare la corrente di spostamento $I_S(t)$:

$$I_S(t) = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$I_S(t) = \varepsilon_0 \frac{V_0 S}{D_0}\frac{d}{dt}\left[2 + \sin(\omega t)\right]$$

$$I_S(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0 S}{D_0}\omega \cos(\omega t)$$

Confrontando col risultato del punto 1), si vede che la corrente di spostamento e la corrente che attraversa il generatore sono uguali, $I_S(t)=I_G(t)$.



Punto 3): Per determinare il campo magnetico *B* all'interno del condensatore bisogna considerare che il teorema di Ampere funziona anche con la corrente di spostamento:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{S,CONC}$$

dove la circuitazione del campo magnetico *B* su un cammino chiuso (a sinistra nella precedente equazione) è legata alla corrente di spostamento che attraversa la superficie racchiusa dal cammino (corrente di spostamento concatenata al cammino: $I_{S,CONC}$). Dato che le piastre sono circolari e virtualmente infinite, la corrente di spostamento è uniformemente distribuita attraverso la sezione del condensatore. Il campo magnetico generato da tale corrente è quindi analogo al campo *B* generato all'interno di una barra metallica cilindrica quando essa è attraversata da una densità di corrente uniforme (parallela all'asse della barra).

Per motivi di simmetria (analogamente alla barra cilindrica percorsa da densità di corrente uniforme), il campo magnetico B giace su piani paralleli alle piastre del condensatore, è tangente a circonferenze che hanno il centro sull'asse che unisce i centri delle piastre, e ha modulo uniforme su tali circonferenze.

Nella figura a lato la freccia blu indica qualitativamente la corrente di spostamento (che però è distribuita su tutta la sezione *S*) mentre la circonferenza di raggio *r* è il cammino chiuso su cui calcolare la circuitazione di *B*. Applicando il teorema di Ampere con tali condizioni di simmetria, si ottiene un'espressione semplice per la circuitazione di *B*:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = 2\pi r B$$

dove r è il raggio del cammino chiuso. Per quanto riguarda la corrente concatenata a tale cammino, osserviamo che la densità di corrente di spostamento, uniforme su S, è pari a:

$$J_S = \frac{I_S}{S}$$

da cui si ha che la corrente concatenata al cammino data da:

$$I_{S,CONC} = J_S \pi r^2 = \frac{I_S}{S} \pi r^2$$

Mettendo insieme i due termini del teorema di Ampere così determinati si ottiene un'equazione per il campo magnetico B:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{S,CONC}$$

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{I_S}{S} \pi r^2$$

$$B = \mu_0 \frac{I_S}{2S} r$$

$$B(r,t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{V_0}{2D_0} r\omega \cos(\omega t)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito a I_S l'espressione determinata precedentemente, e abbiamo messo in evidenza la dipendenza del campo magnetico B dalla posizione r e dal tempo t, B=$B(r,t)$.

Vale la pena notare che tale risultato è corretto nel caso di piastre circolari virtualmente infinite, ma non realmente tali (ovvero non siamo nel caso ideale di S=∞). Infatti è solo nel caso di S circolare con estensione finita che l'asse passante per il centro delle piastre è un asse privilegiato, rispetto ad altri assi, da un punto di vista delle simmetrie. Nel caso ideale di S infinito, tutti gli assi perpendicolari a S sono equivalenti fra loro.

Punto 4): La potenza istantanea erogata da un generatore, W_G, è generalmente data dal prodotto fra tensione ai capi del generatore e corrente che attraversa il generatore:

$$W_G(t) = V_0 I_G(t)$$

$$W_G(t) = \frac{\varepsilon_0 V_0^2 S}{D_0} \omega \cos(\omega t)$$

Per quanto riguarda il condensatore C, abbiamo che l'energia elettrica in esso accumulata è generalmente data da:

$$U_C(t) = \frac{1}{2} C(t) V_0^2$$

$$U_C(t) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 V_0^2 S}{D_0} [2 + \sin(\omega t)]$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito $C(t)$ con l'espressione determinata precedentemente. La derivata di $U_C(t)$ rispetto al tempo t, fornisce la potenza istantanea $W_C(t)$ assorbita dal condensatore:

$$W_C = \frac{dU_C(t)}{dt}$$

$$W_C = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 V_0^2 S}{D_0} \frac{d}{dt} [2 + \sin(\omega t)]$$

$$W_C = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 V_0^2 S}{D_0}\omega \sin(\omega t)$$

Come si vede la potenza fornita dal generatore è il doppio di quella assorbita del condesatore, $W_G=2W_C$.

In un bilancio energetico che tenga conto di tutte le forme di energia, dobbiamo considerare la potenza assorbita dal campo elettrico (W_C) all'interno del condensatore, ma anche la potenza assrobita per produrre e sostenere il campo magnetico $B(r,t)$ all'interno del condensatore (che non è inclusa in W_C). Si ricordi infatti che ovunque sia presente un campo magnetico abbiamo una densità di energia u_B per unità di volume pari a:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2(r,t)}{\mu_0}$$

Quindi all'interno del condensatore ci sarà anche energia immagazzinata sotto forma di campo magnetico, e ci sarà potenza assorbita per il campo magnetico. Infine bisogna anche tener conto della potenza meccanica fornita dall'esterno nella forma di oscillazione di una delle due piastre del condensatore. Quindi in un bilancio energetico completo bisogna tener conto della potenza meccanica fornita dall'esterno e della potenza erogata dal generatore, la cui somma in assenza di dissipazioni sarà pari alla potenza assorbita dal condensatore per sostenere il campo elettrico e alla potenza necessaria a sostenere il campo magnetico. Di conseguenza la potenza erogata dal generatore, W_G, e quella assorbita per il campo elettrico, W_C, non sono uguali fra loro.