Risultati esame scritto Fisica 1 - 27/02/2017
orali: 09/03/2017 alle ore 10.30 presso aula N

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
213273	12	
212168	11	
118461	nc	
212725	nc	
211011	13	
210931	12	
211278	nc	
118527	11	
209427	nc	
212574	nc	
209951	10	
207890	17	ammesso
209184	13	
212120	12	
207803	14	
211004	nc	
118571	nc	
118937	nc	
211041	13	
210960	nc	
114910	nc	
120823	14	
211161	nc	
210968	18	ammesso

nc=non classificato (< 10)

Esame di Fisica 1

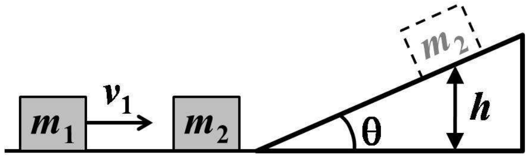
Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 27/02/2017

Problema 1

Un corpo di massa m_1=2.0kg viaggia su un piano orizzontale senza attrito con velocità costante v_1, prima di urtare elasticamente un corpo di massa m_2=4.0kg inizialmente in quiete. Il corpo m_2 si trova poco prima dell'inizio di un piano inclinato (vedi figura) che forma un angolo θ=30° col piano orizzontale. Fra il corpo m_2 e il piano orizzontale non vi è attrito, mentre fra il corpo m_2 e il piano inclinato vi è attrito con coefficiente μ (attrito statico e dinamico hanno lo stesso coefficiente). Dopo l'urto perfettamente elastico, il corpo m_2 raggiunge una quota massima h=3.0m prima di tornare indietro lungo il piano inclinato, e alla fine della discesa arriva alla base del piano inclinato con una velocità $v_0=(g\cdot h)^{1/2}$ dove g è l'accelerazione di gravità.

1) Calcolare il coefficiente di attrito μ fra piano inclinato e corpo m_2.

2) Calcolare la velocità iniziale v_1 del corpo m_1 prima dell'urto elastico.



Problema 2

Sia dato un gas perfetto che compie un ciclo termodinamico reversibile costituito da 6 trasformazioni, come riportato in figura:

i) un'espansione isoterma a temperatura T_A dal volume V_1 a V_2,

ii) un'espansione adiabatica dal volume V_2 a V_3,

iii) un'espansione isoterma a temperatura T_B da V_3 a V_4,

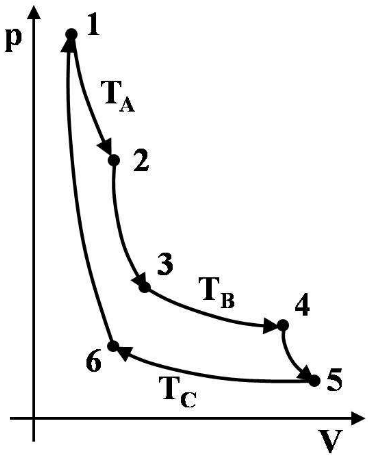
iv) un'espansione adiabatica dal volume V_4 a V_5,

v) una compressione isoterma a temperatura T_C dal volume V_5 a V_6,

vi) una compressione adiabatica dal volume V_6 a V_1.

1) Dimostrare che per un ciclo costituito da questa serie di trasformazioni vale sempre la seguente uguaglianza: $(V_2 \cdot V4)/(V_1 \cdot V_3)=V_5/V_6$

2) Calcolare il rendimento del ciclo nel caso particolare in cui $T_A=2\cdot T_B$, $T_A=3\cdot T_C$, $V_2=e\cdot V_1$, $V_4=e^2\cdot V_3$, dove e è il numero di Nepero.



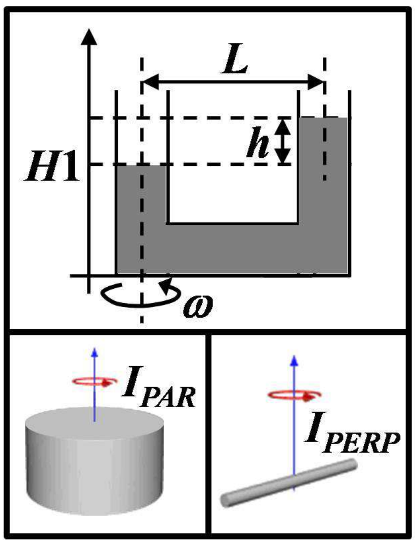
Problema 3

Sia dato un tubo ad U avente sezione circolare di area uniforme pari a S=0.5m^2, disposto nel piano verticale come rappresentato in figura, e contenente acqua (densità ρ=1000kg/m^3). La distanza fra gli assi dei rami del tubo è L=2.5m. Entrambi i rami del tubo sono aperti in alto e a contatto con la pressione atmosferica p_0. Un'azione esterna mette in rotazione il tubo intorno all'asse verticale passante per il centro del ramo di sinistra (vedi figura), fino a raggiungere una velocità angolare ω=2.0rad/s. Per ω costante si ha un dislivello h costante fra il ramo di sinistra e quello di destra. Siano nulle tutte le forze dissipative (attriti e viscosità), e il liquido sia incomprimibile.

1) Calcolare il dislivello h fra i rami del tubo, mettendo in relazione le differenti pressioni presenti ai capi del tratto orizzontale di tubo con la forza centripeta che agisce sul liquido nel medesimo tratto orizzontale.

2) Sapendo che nel ramo di sinistra il livello dell'acqua arriva ad un'altezza H_1=3.0m, calcolare il momento di inerzia totale I del sistema per la rotazione data [il momento di inerzia di un cilindro per rotazione avente l'asse passante per il centro del cilindro è $I_{PAR}=½MR^2$ se l'asse di rotazione è parallelo a quello del cilindro, mentre è $I_{PERP}=ML^2/12$ se l'asse di rotazione è perpendicolare a quello del cilindro; M, R e L sono rispettivamente massa, raggio e lunghezza del cilindro].

3) Calcolare il lavoro fatto dall'esterno per portare il sistema alla velocità angolare ω.



Soluzione problema 1

Dopo l'urto elastico il corpo m_2 si muove senza attrito sul piano orizzontale e quindi con velocità costante, v_{2f}, fino all'inizio del piano inclinato. Da lì in poi il corpo m_2 inzia a salire sul piano inclinato, ma è rallentato dalla componente della forza peso parallela al piano inclinato, pari a $m_2 g \cdot \sin\theta$, e dalla forza di attrito, in modulo pari a $\mu m_2 g \cdot \cos\theta$. Dopo aver raggiunto la quota massima h, m_2 scende lungo il piano inclinato sotto l'azione della componente parallela della forza peso, e arriva alla base con velocità $v_0=(gh)^{1/2}$; lungo la discesa la forza di attrito si oppone nuovamente al moto di m_2 e ne rallenta la discesa. Applicando un bilancio energetico alla fase di discesa lungo il piano inclinato, abbiamo che l'energia iniziale è tutta energia potenziale U_2 dovuta alla forza peso, l'energia finale è tutta energia cinetica pari a $K_{2,0}$, e inoltre c'è il lavoro fatto dalla forza di attrito, W_{ATT}, che sottrae energia a m_2. Questi termini energetici sono dati dalle seguenti espressioni:

$$U_2 = m_2 gh$$

$$K_{2,0} = \frac{1}{2} m_2 v_0^2$$

$$W_{ATT} = \mu m_2 g \cos\theta \cdot l$$

dove l è lo spazio percorso parallelamente al piano inclinato ed è pari a $l=h/\sin\theta$.

Il bilancio energetico diventa allora:

$$U_2 = K_{2,0} + W_{ATT}$$

$$m_2 gh = \frac{1}{2} m_2 v_0^2 + \mu m_2 g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$2gh = v_0^2 + 2\mu gh \cot\theta$$

dove abbiamo posto $l= h/\sin\theta$.

Nell'ultima equazione l'unica incognita è il coefficiente di attrito μ, dato che per v_0 possiamo usare l'espressione $v_0=(gh)^{1/2}$ data dal problema:

$$2\mu gh \cot\theta = 2gh - v_0^2$$

$$\mu = \frac{2gh - gh}{2gh \cot\theta}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \tan\theta \approx 0.29$$

Punto 2): Per poter calcolare la velocità iniziale v_1 del corpo m_1 applichiamo la conservazione della quantità di moto e dell'energia per l'urto elastico fra m_1 e m_2, utilizzando al posto dell'espressione quadratica per la conservazione dell'energia l'espressione lineare che lega le velocità dei corpi m_1 e m_2:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_1 + v_{1f} = v_2 + v_{2f} \end{cases}$$

Dato che m_2 è inizialmente in quiete, $v_2=0$, il precedente sistema diventa:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_1 + v_{1f} = v_{2f} \end{cases}$$

dove abbiamo due equazioni nelle tre incognite v_1, v_{1f} e v_{2f}.

Una terza condizione la otteniamo applicando il bilancio energetico al moto di m_2 fra l'inizio del piano inclinato dove m_2 possiede solo energia cinetica K_2, e la quota massima raggiunta da m_2 dove esso possiede solo energia potenziale U_2 (m_2 raggiunge il punto più alto con velocità nulla). Fra queste due posizioni c'è di nuovo il lavoro fatto dalla forza di attrito lungo il piano inclinato, W_{ATT}, che sottrae energia a m_2. Questi termini energetici sono dati dalle seguenti espressioni:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$U_2 = m_2 gh$$

$$W_{ATT} = \mu m_2 g \cos\theta \cdot l$$

dove l è di nuovo lo spazio percorso parallelamente al piano inclinato, $l=h/\sin\theta$.
Il bilancio energetico diventa allora:

$$K_2 = U_2 + W_{ATT}$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 = m_2 gh + \mu m_2 g \cos\theta \frac{h}{\sin\theta}$$

$$v_{2f}^2 = 2gh + 2\mu gh \cot\theta$$

Sostituendo in tale espressione quella trovata al punto 1) per il coefficiente di attrito μ, si ottiene che:

$$\mu = \frac{1}{2}\tan\theta$$

$$v_{2f}^2 = 2gh + 2\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right) gh \cot\theta$$

$$v_{2f}^2 = 2gh + gh$$

$$v_{2f} = \sqrt{3gh} \approx 9.4\text{m/s}$$

Tornando al sistema per l'urto elastico, abbiamo ora un'incognita di meno e quindi due equazioni in due incognite, v_1 e v_{1f}:

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ v_{1f} = v_{2f} - v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_{2f} - m_1 v_1 + m_2 v_{2f} \\ v_{1f} = v_{2f} - v_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_{2f} \\ v_{1f} = v_{2f} - v_1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione del sistema si ricava allora che:

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1} v_{2f}$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{2m_1}\sqrt{3gh} \approx 14.1\text{m/s}$$

dove abbiamo sostituito l'espressione trovata precedentemente per v_{2f}.

Soluzione problema 2

Punto 1): Consideriamo le tre trasformazioni adiabatiche, rispettivamente fra gli stati 2 e 3, fra gli stati 4 e 5, e fra gli stati 6 e 1. Per ciascuna di queste possiamo scrivere l'equazione che governa le adiabatiche:

$$\begin{cases} T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_3^{\gamma-1} \\ T_B V_4^{\gamma-1} = T_C V_5^{\gamma-1} \\ T_C V_6^{\gamma-1} = T_A V_1^{\gamma-1} \end{cases}$$

dove il parametro γ è il rapporto fra le capacità termiche a pressione e volume costante, $\gamma = C_P/C_V$. Dalle precedenti equazioni, facendo il prodotto membro a membro della prima e seconda equazione e il prodotto membro a membro della prima e terza equazione, si ottiene che:

$$\begin{cases} T_A T_B (V_2 V_4)^{\gamma-1} = T_B T_C (V_3 V_5)^{\gamma-1} \\ T_A T_C (V_2 V_6)^{\gamma-1} = T_A T_B (V_1 V_3)^{\gamma-1} \end{cases}$$

Nella seconda equazione così ottenuta scambiamo fra loro i membri a destra e sinistra dell'uguaglianza, e poi facciamo il rapporto membro a membro delle due equazioni:

$$\begin{cases} T_A T_B (V_2 V_4)^{\gamma-1} = T_B T_C (V_3 V_5)^{\gamma-1} \\ T_A T_B (V_1 V_3)^{\gamma-1} = T_A T_C (V_2 V_6)^{\gamma-1} \end{cases}$$

$$\frac{T_A T_B (V_2 V_4)^{\gamma-1}}{T_A T_B (V_1 V_3)^{\gamma-1}} = \frac{T_B T_C (V_3 V_5)^{\gamma-1}}{T_A T_C (V_2 V_6)^{\gamma-1}}$$

$$\left(\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B V_3^{\gamma-1}}{T_A V_2^{\gamma-1}}\left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{\gamma-1}$$

Si noti che dalla prima equazione scritta per la prima trasformazione adiabatica:

$$T_A V_2^{\gamma-1} = T_B V_3^{\gamma-1}$$

si ottiene che:

$$\frac{T_B V_3^{\gamma-1}}{T_A V_2^{\gamma-1}} = 1$$

che sostituita nell'ultima equazione ottenuta dal rapporto membro a membro ci dà il risultato cercato:

$$\left(\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B V_3^{\gamma-1}}{T_A V_2^{\gamma-1}}\left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3}\right)^{\gamma-1} = 1 \cdot \left(\frac{V_5}{V_6}\right)^{\gamma-1}$$

$$\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = \frac{V_5}{V_6}$$

Per ottenere questo risultato non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul tipo di gas (mono-, bi-, poli-atomico), nessuna iptoesi sui valori delle temperature T_A T_B e T_C o sui valori dei volumi V_1 V_2 V_3 V_4 V_5 e V_6. Quindi in ogni ciclo reversibile costituito dalla stessa sequenza di trasformazioni, deve valere la relazione appena trovata fra i volumi. Si noti fra l'altro che la precedente espressione stabilisce una relazione fra i rapporti di espansione delle trasformazioni isoterme:

$$\frac{V_2 V_4}{V_1 V_3} = \frac{V_5}{V_6}$$

$$\frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_5}{V_6}$$

dove V_2/V_1 è il rapporto di espansione della prima isoterma (dallo stato 1 allo stato 2), V_4/V_3 è il rapporto di espansione della seconda isoterma (da 3 a 4), e V_5/V_6 è il rapporto di espansione dell'ultima isoterma.

Punto 2): Il rendimento η di un ciclo è dato da:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{CED}|}{Q_{ASS}}$$

dove Q_{ASS} e Q_{CED} sono rispettivamente il calore assorbito e ceduto durante il ciclo. Nelle tre adiabatiche si ha ovviamente ΔQ=0, ovvero non c'è scambio di calore con l'esterno. I calori assorbiti e ceduti si hanno allora solo con le isoterme. Per il I principio della temodinamica, in una trasformazione isoterma il calore scambiato con l'esterno è pari al lavoro fatto verso l'esterno, ΔQ=ΔW, perché la variazione di energia interna è nulla (ΔU=0) per un'isoterma. Seguono allora queste espressioni per le tre isoterme:

$$\Delta Q_{12} = \Delta W_{12} = nRT_A \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) > 0$$

$$\Delta Q_{34} = \Delta W_{34} = nRT_B \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) > 0$$

$$\Delta Q_{56} = \Delta W_{56} = nRT_C \ln\left(\frac{V_6}{V_5}\right) < 0$$

Come vediamo i primi due termini, ΔQ_{12} e ΔQ_{34}, sono maggiori di zero perché si tratta di espansioni isoterme, il lavoro fatto verso l'esterno è positivo e di conseguenza c'è assorbimento di calore. Invece l'ultimo termine, ΔQ_{56}, è minore di zero perché si tratta di una compressione isoterma, il lavoro fatto verso l'esterno è negativo (lavoro subito) e il calore viene ceduto. Quindi i primi due costituiscono il calore assorbito, Q_{ASS}, mentre l'ultimo è il calore ceduto, Q_{CED}, durante il ciclo. Sostituendo nella formula per il rendimento η si ottiene che:

$$\eta = 1 - \frac{|\Delta Q_{56}|}{\Delta Q_{12} + \Delta Q_{34}}$$

$$\eta = 1 - \frac{nRT_C \ln(V_5/V_6)}{nRT_A \ln(V_2/V_1) + nRT_B \ln(V_4/V_3)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_C \ln(V_5/V_6)}{T_A \ln(V_2/V_1) + T_B \ln(V_4/V_3)}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_C \ln(V_2 V_4/V_1 V_3)}{T_A \ln(V_2/V_1) + T_B \ln(V_4/V_3)}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito a V_5/V_6 l'espressione trovata al punto 1).

Sfruttiamo le proprietà dei logaritmi e riarrangiamo l'espressione per il rendimento:

$$\eta = 1 - \frac{T_C [\ln(V_2/V_1) + \ln(V_4/V_3)]}{T_A \left[\ln(V_2/V_1) + \frac{T_B}{T_A} \ln(V_4/V_3)\right]}$$

$$\eta = 1 - \frac{[\ln(V_2/V_1) + \ln(V_4/V_3)]}{\frac{T_A}{T_C} \left[\ln(V_2/V_1) + \frac{T_B}{T_A} \ln(V_4/V_3)\right]}$$

Sostituendo le espressioni fornite dal testo del problema per il punto 2), $T_A=2 \cdot T_B$, $T_A=3 \cdot T_C$, $V_2=e \cdot V_1$, $V_4=e^2 \cdot V_3$, si ottiene che:

$$\eta = 1 - \frac{[\ln(e) + \ln(e^2)]}{3\left[\ln(e) + \frac{1}{2}\ln(e^2)\right]}$$

$$\eta = 1 - \frac{1+2}{3\left[1 + \frac{1}{2} \cdot 2\right]} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Dato che abbiamo un dislivello h fra i due rami del tubo ad U, per la legge di Stevino (pressione idrostatica) abbiamo due pressioni diverse in fondo ai singoli rami. Per il ramo di sinistra la pressione sul fondo sarà:

$$p_{SX} = p_0 + \rho g H_1$$

mentre per il ramo a destra abbiamo che:

$$p_{DX} = p_0 + \rho g H_1 + \rho g h$$

Ovviamente la pressione a destra, p_{DX}, è maggiore di quella a sinistra, p_{SX}, e tale differenza di pressione Δp esercita un'azione meccanica da destra verso sinistra (ovvero in direzione centripeta) sul liquido nel tratto di tubo orizzontale:

$$\Delta p = p_{DX} - p_{SX}$$

$$\Delta p = p_0 + \rho g H_1 + \rho g h - p_0 - \rho g H_1$$

$$\Delta p = \rho g h$$

Dato che la sezione del tubo è pari a S, la forza F che si esercita sul liquido del tratto di tubo orizzontale è pari a:

$$F = \Delta p \cdot S$$
$$F = \rho g h S$$

Dato che come detto prima tale forza ha direzione centripeta, per il II principio della dinamica essa sarà pari proprio alla forza centripeta F_C che agisce sul liquido del tubo orizzontale. A tal proposito osserviamo che dal punto di vista della dinamica, ovvero parlando di forze, possiamo assumere che la risultante delle forze, F_C, sia applicata nel centro del tubo orizzontale (a distanza $L/2$ dall'asse di rotazione) e che tutta la massa m del liquido nel tubo orizzontale sia concentrata nel punto centrale:

$$F_C = m \frac{v^2}{L/2}$$
$$F_C = \rho S L \frac{(\omega L/2)^2}{L/2}$$
$$F_C = \frac{1}{2} \rho S L^2 \omega^2$$

dove abbiamo posto la massa $m=\rho SL$ e la velocità $v=\omega L/2$. Uguagliando la forza centripeta F_C alla forza F dovuta alla differenza di pressione nei rami del tubo, si ottiene un'equazione per il dislivello h:

$$F = F_C$$
$$\rho g h S = \frac{1}{2} \rho S L^2 \omega^2$$
$$h = \frac{L^2 \omega^2}{2g} \approx 1.28\text{m}$$

Punto 2): Per il momento di inerzia totale I, dobbiamo considerare il sistema come costituito dal ramo cilindrico di sinistra che ruota attorno al suo asse, dal tratto orizzontale che è come una barra orizzontale che ruota attorno ad un asse verticale passante per il suo estremo di sinistra, e dal ramo cilindrico di destra che ruota attorno ad un asse parallelo al proprio asse ma a distanza L da esso.

Un cilindro che ruota attorno al proprio asse ha momento di inerzia $I_{CIL}=½MR^2$, per cui il momento di inerzia del ramo a sinistra è dato da:

$$I_{SX} = \frac{1}{2} M R^2$$
$$I_{SX} = \frac{1}{2} \rho S H_1 \frac{S}{\pi}$$
$$I_{SX} = \rho S \frac{H_1 S}{2\pi}$$

dove abbiamo posto la massa M pari alla massa di liquido contenuta nel ramo di sinistra, ρSH_1, e il raggio del cilindro $R=(S/\pi)^{1/2}$ dato che si tratta di una sezione circolare.

Per calcolare il momento di inerzia del ramo a destra, applichiamo il teorema di Steiner ad un cilindro che ruota attorno ad un asse parallelo all'asse del cilindro ma distante L da esso:

$$I_{DX} = ML^2 + \frac{1}{2}MR^2$$

$$I_{DX} = \frac{1}{2}M\left(2L^2 + R^2\right)$$

$$I_{DX} = \frac{1}{2}\rho S\left(H_1 + h\right)\left(2L^2 + R^2\right)$$

$$I_{DX} = \rho S\left(H_1 + h\right)\left(L^2 + \frac{S}{2\pi}\right)$$

Infine, per il momento di inerzia tratto orizzontale di tubo, I_{HOR}, applichiamo nuovamente il teorema di Steiner. Il testo del problema ci fornisce il momento di inerzia di una barra orizzontale che ruota intorno al suo centro con asse di rotazione verticale, ovvero perpendicolare all'asse della barra. Nel nostro caso invece la barra orizzontale ruota intorno ad un asse verticale passante per un'estremità e distante quindi $L/2$ dal centro:

$$I_{HOR} = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

$$I_{HOR} = \frac{1}{12}M\left(3L^2 + L^2\right) = \frac{1}{3}ML^2$$

Sostituendo la massa M con la massa di liquido contenuta nel tratto orizzontale, si ottiene che:

$$I_{HOR} = \frac{1}{3}\left(\rho SL\right)L^2 = \rho S\frac{L^3}{3}$$

Il momento di inerzia totale I è dato dalla somma dei tre momenti di inerzia appena calcolati:

$$I = I_{SX} + I_{DX} + I_{HOR}$$

$$I = \rho S\frac{H_1 S}{2\pi} + \rho S\left(H_1 + h\right)\left(L^2 + \frac{S}{2\pi}\right) + \rho S\frac{L^3}{3}$$

$$I = \rho S\left[\frac{H_1 S}{2\pi} + \left(H_1 + h\right)\left(L^2 + \frac{S}{2\pi}\right) + \frac{L^3}{3}\right]$$

$$I = \rho S\left[H_1\left(L^2 + \frac{S}{\pi}\right) + h\left(L^2 + \frac{S}{2\pi}\right) + \frac{L^3}{3}\right] = 16.26\cdot 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^2}$$

Punto 3): Inizialmente il sistema è in quiete e quindi l'energia cinetica iniziale è nulla, $K_{TOT,i}$=0. L'energia potenziale dovuta alla forza peso è invece data dall'energia posseduta dal liquido nei due rami del tubo. Siccome inizialmente il sistema è in quiete e la pressione esterna è p_0 per entrambi i rami, il livello dell'acqua nei due rami è lo stesso ed è pari ad H:

$$H = H_1 + \frac{h}{2}$$

Poiché dal punto di vista della forza peso (forza esterna) possiamo assumere che tutta la massa della colonna di liquido sia concentrata nel punto centrale del ramo, per l'energia potenziale abbiamo la massa M dell'acqua tutta posizionata ad una quota pari a $H/2$:

$$U = Mg\frac{H}{2}$$

$$U = \rho SHg\frac{H}{2}$$

dove abbiamo posto $M=\rho SH$. Dato che abbiamo due rami uguali, l'energia potenziale iniziale $U_{TOT,i}$ è data da:

$$U_{TOT,i} = 2U$$

$$U_{TOT,i} = 2 \cdot \rho SHg\frac{H}{2}$$

$$U_{TOT,i} = \rho gSH^2$$

Quando la velocità angolare è pari a ω, si ha il dislivello h calcolato al punto 1) fra i due rami del tubo a U. L'energia potenziale sarà ora diversa nei due rami. Nel ramo di sinistra dove il livello del liquido è H_1 avremo che (analogamente a quanto visto prima):

$$U_{SX} = \rho SH_1 g\frac{H_1}{2}$$

$$U_{SX} = \frac{1}{2}\rho gSH_1^2$$

Per il ramo di destra abbiamo invece che il livello dell'acqua è pari a H_1+h, e quindi la sua energia potenziale sarà:

$$U_{DX} = \frac{1}{2}\rho gS(H_1+h)^2$$

Ne segue che l'energia potenziale finale $U_{TOT,f}$ di tutto il sistema è pari a:

$$U_{TOT,f} = U_{SX} + U_{DX}$$

$$U_{TOT,f} = \frac{1}{2}\rho gSH_1^2 + \frac{1}{2}\rho gS(H_1+h)^2$$

$$U_{TOT,f} = \frac{1}{2}\rho gSH_1^2 + \frac{1}{2}\rho gS\left(H_1^2 + h^2 + 2H_1 h\right)$$

$$U_{TOT,f} = \frac{1}{2}\rho gS\left(2H_1^2 + 2H_1 h + h^2\right)$$

Vale la pena notare che sia nella situazione iniziale che in quella finale non è stata considerata alcuna energia potenziale per il tratto orizzontale del tubo. Questo perché siamo interessati alla differenza di energia potenziale, $\Delta U=U_{TOT,f}-U_{TOT,i}$, e poiché il tratto orizzontale rimane comunque pieno di liquido, la sua energia potenziale non cambia.

Calcoliamo ora la differenza di energia potenziale:

$$\Delta U = U_{TOT,f} - U_{TOT,i}$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho gS\left(2H_1^2 + 2H_1 h + h^2\right) - \rho gSH^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho g S\left(2H_1^2 + 2H_1 h + h^2\right) - \rho g S\left(H_1 + \frac{h}{2}\right)^2$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho g S\left(2H_1^2 + 2H_1 h + h^2\right) - \rho g S\left(H_1^2 + \frac{h^2}{4} + H_1 h\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\rho g S\left(2H_1^2 + 2H_1 h + h^2 - 2H_1^2 - \frac{h^2}{2} - 2H_1 h\right)$$

$$\Delta U = \frac{1}{4}\rho g S h^2 = \frac{1}{16}\frac{\rho S}{g}L^4\omega^4$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito a h^2 l'espressione determinata al punto 1).

Per quanto riguarda l'energia cinetica finale vale la pena notare che il centro di massa del sistema non coincide col centro geometrico, perché nel ramo di destra vi è più liquido che in quello di sinistra quando $\omega \neq 0$. Se utilizziamo il momento di inerzia totale I calcolato al punto 2), l'energia cinetica è tutta rotazionale e non bisogna considerare alcun contributo per l'energia cinetica traslazionale del centro di massa:

$$K_{TOT,f} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\Delta K = K_{TOT,f} - 0 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Concludendo, per il bilancio dell'energia il lavoro W_{ext} fatto dall'esterno per arrivare a velocità angolare ω è pari alla differenza di energia:

$$W_{ext} = \Delta K + \Delta U$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{4}\rho g S h^2$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{16}\frac{\rho S}{g}L^4\omega^4$$

$$W_{ext} = \frac{1}{2}\omega^2\left(I + \frac{1}{8}\frac{\rho S}{g}L^4\omega^2\right) \approx 34.5\text{kJ}$$