Risultati esame scritto Fisica 2 - 06/03/2017

orali: 14/03/2017 alle ore 11.00 presso studio del docente

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
114953	12	
114892	nc	
114952	12	
207396	18	ammesso
114899	nc	
118471	13	
117836	14	
118519	nc	
115063	nc	
120234	11	

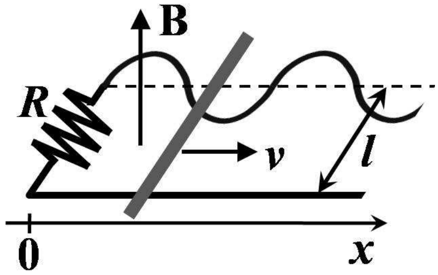
nc = non classificato (< 10)

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 06/03/2017

Problema 1

Sia dato un circuito come quello in figura costituito da due binari disposti su un piano orizzontale, di cui uno rettilineo e l'altro a forma di sinsusoide. I binari sono chiusi sul lato sinistro da una resistenza elettrica R, mentre a destra vi è una barra conduttrice che chiude il circuito e che può scorrere senza attrito sui binari. Eccetto la resistenza R, tutte le altre resistenze elettriche sono trascurabili. Come riportato in figura, la distanza fra il binario rettilineo e l'asse passante per il centro della sinusoide è pari a l. La sinusoide del binario è descritta dalla funzione $A \cdot \sin(kx)$, dove x è la distanza percorsa lungo i binari mentre k e A sono parametri noti (si osservi che $A<l$).

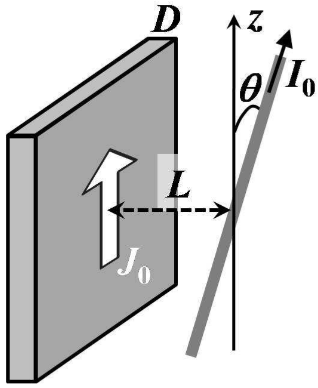


Il circuito è immerso in un campo magnetico B uniforme e costante, perpendicolare al piano orizzontale dei binari e diretto verso l'alto in figura. La barra conduttrice mobile si muove con velocità costante v verso destra in figura. Determinare la potenza media $<W_J>$ dissipata per effetto Joule sulla resistenza R.

[Si esprima il risultato in funzione dei parametri che sono necessari fra: R, A, k, l, B, v e ove necessario delle costanti universali].

Problema 2

Sia dato un nastro conduttore di spessore D e superficie infinita, percorso da corrente elettrica tangenziale alla superficie, con densità di corrente per unità di superficie pari a J_0 diretta lungo l'asse z e verso l'alto in figura. A una distanza dal nastro $L>>D$ si trova un filo conduttore di lunghezza infinita, parallelo al nastro, ma obliquo rispetto alla direzione della corrente J_0 (e quindi obliquo rispetto all'asse z). L'angolo formato tra il filo infinito e la direzione di J_0 è pari a θ (vedi figura). Il filo è percorso da corrente elettrica I_0 come riportato in figura.



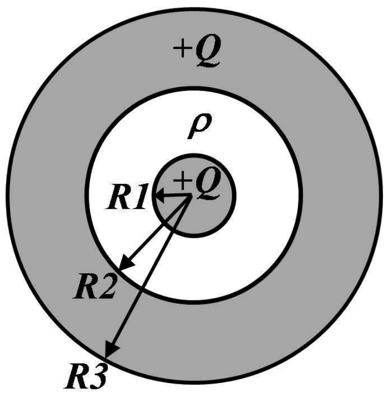
1) Determinare il vettore campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) generato dal solo nastro conduttore in tutto lo spazio circostante.

2) Determinare il modulo della forza per unità di lunghezza, dF/dl, che si esercita sul filo infinito indicando anche direzione e verso della forza; determinare inoltre per quale valore di θ tale forza è nulla.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: J_0, I_0, L, θ, e ove necessario delle costanti universali].

Problema 3

Sia data una sfera metallica conduttrice di raggio R_1 e con carica positiva $+Q$. Tale sfera è racchiusa in un guscio sferico dielettrico con raggio interno R_1 e raggio esterno $R_2=2^{1/2} \cdot R_1$, avente una distribuzione uniforme di carica negativa con densità per unità di volume $\rho=-Q/(\pi R_1^3)$. Il tutto è racchiuso in un ulteriore guscio sferico metallico che possiede una carica totale positiva pari a $+Q$, e avente raggio interno R_2 e raggio esterno $R_3=3^{1/2} \cdot R_1$.



1) Determinare l'espressione del campo elettrico $E=E(r)$ in funzione della distanza radiale r dal centro del sistema, in tutto lo spazio (ovvero per $0 \leq r < \infty$), e darne una rappresentazione grafica.

2) Determinare la densità di carica superficiale presente su ciascuna superficie metallica, ovvero per $r=R_1$, $r=R_2$ e $r=R_3$.

3) Determinare per quale espressione della densità di carica ρ si ha densità di carica superficiale nulla su R_2.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri Q, R_1, e ove necessario in funzione della distanza r e delle costanti universali].

Soluzione problema 1

Nel problema abbiamo un caso di flusso tagliato la cui particolarità consiste nella presenza di un binario sinusoidale. Per arrivare alla potenza dissipata per effetto Joule è necessario calcolare prima di tutto la forza elettromotrice indotta dall'induzione di Faraday, f_{ind}. A tal proposito valutiamo una porzione di flusso infinitesimo, $d\Phi_B$, del campo magnetico attraverso una piccola porzione di superficie dS. Dato quindi uno spostamento infinitesimo dx lungo i binari, la superficie infinitesima dS corrispondente è data da:

$$y(x) = l + A\sin(kx)$$
$$dS = y(x)\cdot dx$$
$$dS = [l + A\sin(kx)]dx$$

dove $y(x)$ è la distanza che c'è fra il binario rettilineo e quello sinusoidale, in funzione di x.

La porzione infinitesima di flusso $d\Phi_B$ è data allora da:

$$d\Phi_B = B\cdot dS$$
$$d\Phi_B = B[l + A\sin(kx)]dx$$

Per l'induzione di Faraday si ha la seguente espressione per la forza elettromotrice indotta f_{ind}:

$$f_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$
$$f_{ind} = -B[l + A\sin(kx)]\frac{dx}{dt}$$
$$f_{ind} = -B[l + A\sin(kx)]v$$

dove abbiamo sostituito la velocità v data dal problema all'espressione dx/dt. Il segno "–" di f_{ind} indica che la forza elettromotrice indotta è negativa (B, v e il termine fra parentesi quadre sono tutti positivi), e quindi la corrente gira in senso orario nella figura del problema.

Per la legge di Ohm, la corrente I che circola nel circuito è data da:

$$I = \frac{f_{ind}}{R}$$
$$I = -\frac{Bv}{R}[l + A\sin(kx)]$$

da cui segue che la potenza istantanea, W_J, dissipata per effetto Joule sulla resistenza R è la seguente:

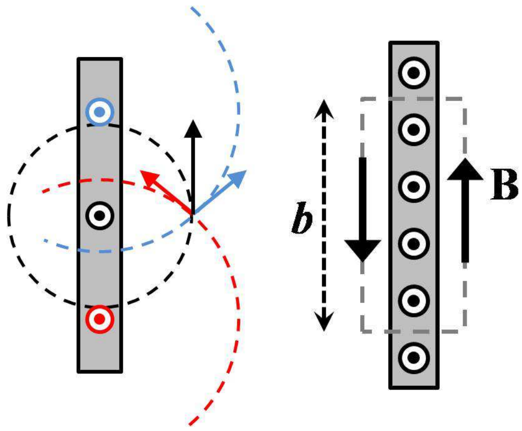
$$W_J = RI^2$$
$$W_J = \frac{B^2v^2}{R}[l + A\sin(kx)]^2$$
$$W_J = \frac{B^2v^2}{R}\left[l^2 + A^2\sin^2(kx) + 2lA\sin(kx)\right]$$

La potenza dissipata mediamente sarà pari al valor medio di W_J. A tal proposito si tenga presente che il valor medio di una costante è pari alla costante stessa, il valor medio della funzione $\sin(kx)$ è pari a zero, e il valor medio della funzione $\sin^2(kx)$ è pari a ½:

$$<W_J> = \frac{B^2v^2}{R}\left[<l^2> + A^2 <\sin^2(kx)> + 2lA<\sin(kx)>\right]$$
$$<W_J> = \frac{B^2v^2l^2}{R} + \frac{B^2v^2A^2}{2R} + 0$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Consideriamo prima di tutto la presenza del solo nastro percorso da densità di corrente J_0. Possiamo immaginare allora che all'interno del nastro ci siano molti fili infiniti di spessore D, uno di fianco all'altro. Nella figura a sinistra consideriamo tre di questi fili, uno al centro e altri due a pari distanza dal primo. Siccome il nastro è infinito, dato un filo al suo interno ne possiamo sempre trovare altri due equidistanti da esso. Il campo magnetico generato da un filo infinito a distanza r generica dal filo, è tangente alla circonferenza di raggio r che ha per centro il filo stesso, e gira in senso antiorario intorno alla circonferenza se la corrente è uscente dal foglio (come in figura).



Il campo mangetico generato dal filo centrale nero è dato allora dal vettore nero, diretto verticalmente e verso l'alto in figura; il campo magnetico generato dal filo in basso rosso è dato dal vettore rosso diretto verso l'alto e verso sinistra; il campo magnetico generato dal filo in alto blu è dato dal vettore blu diretto verso l'alto e verso destra. Siccome i fili rosso e blu sono equidistanti dal punto in cui stiamo valutando il campo magnetico, i rispettivi contributi al campo totale sono uguali in modulo. Ma dato che sono simmetricamente disposti uno verso destra e uno verso sinistra, le componenti orizzontali si elidono e rimangono solo le componenti verticali. Possiamo ripetere questo discorso per tutte le coppie di fili equidistanti da quello centrale nero, da cui segue che il campo magnetico a distanza r dal nastro sarà parallelo alla superficie del nastro e perpendicolare alla densità di corrente J_0, ovvero diretto come il vettore nero in figura.

Facendo la somma su tutti i fili in cui viene scomposto il nastro, si ottiene il campo magnetico totale B rappresentato nella figura di destra. Poiché il nastro è infinito, qualsiasi filo centrale nero si scelga sul nastro si hanno inifiniti fili sopra e sotto di esso. Pertanto la sommatoria su questi fili per calcolare il campo totale darà sempre lo stesso risultato se ci spostiamo parallelamente al nastro, e il campo B della figura di destra è quindi costante se se manteniamo fissa la distanza r. Tutto questo discorso può essere ripetuto per il campo magnetico generato dall'altro lato del nastro, con l'unica differenza che il campo sarà diretto verso il basso (vedi figura a destra), ma il modulo di B sarà lo stesso se sono alla medesima distanza r dal nastro.

Fatte queste premesse, usiamo il teorema di Ampere per calcolare il modulo del campo B:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

Per calcolare la circuitazione di B scegliamo un percorso rettangolare come quello rappresentato nella figura di destra, coi lati di lunghezza b del rettangolo paralleli al nastro (vedi figura). Inoltre il nastro passa esattamente per il centro del rettangolo e i lati b sono equidistanti dal nastro stesso, cosicché il campo mangetico B è uguale in modulo sui lati di lunghezza b. Dato che gli altri due lati del rettangolo sono perpendicolari al campo magnetico B, il prodotto scalare $\mathbf{B}\cdot\mathbf{dl}$ sotto il segno di integrale è nullo su questi due lati. Pertanto la circuitazione diventa semplicemente:

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = 2Bb$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che B è costante lungo i lati b (per quanto detto sopra, ovvero perché lungo questi lati si ha una distanza r dal nastro costante).

Per quanto riguarda la corrente concatenata, I_{CONC}, con tale circuitazione rettangolare, bisogna considerare tutta la corrente che attraversa il nastro all'interno del rettangolo. Nota la densità di corrente J_0 e lo spessore del nastro D, si ha la seguente espressione:

$$I_{CONC} = J_0 Db$$

dove Db rappresenta la sezione di nastro tagliata dal rettangolo della circuitazione. Combinando tutto insieme nel teorema di Ampere, abbiamo che:

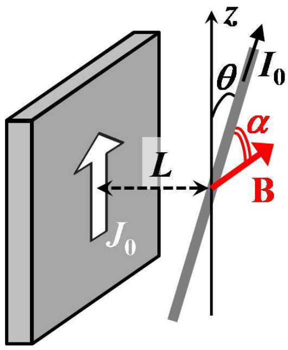
$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{dl} = \mu_0 I_{CONC}$$

$$2Bb = \mu_0 J_0 Db$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0 D}{2}$$

Si noti che il campo magnetico così trovato non dipende dalla distanza r dal nastro.

Se ne conclude allora che il campo magnetico prodotto dal nastro nello spazio circostante è uniforme, di modulo B appena determinato, diretto parallelamente al nastro e perpendicolarmente alla corrente J_0 e quindi con direzione verticale nel piano del foglio delle figure riportate sopra, verso l'alto alla destra del nastro e verso il basso alla sinistra di esso con riferimento alle figure sopra in cui J_0 è uscente dal piano del foglio.



Punto 2): Per calcolare la forza che agisce sul filo percorso da corrente I_0, utilizziamo la II legge di Laplace che ci fornisce l'azione meccanica generata da un campo magnetico su un tratto di filo dl percorso da corrente:

$$\mathbf{dF} = I_0 \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$$

$$dF = I_0 B dl \sin\alpha$$

dove la prima è una relazione vettoriale, utile per conoscere direzione e verso della forza dF, mentre la seconda relazione esprime il modulo di dF esplicitando il prodotto vettoriale. Si badi bene che nel prodotto vettoriale bisogna considerare il $\sin\alpha$, con α angolo compreso fra ilcampo magnetico B e il filo infinito percorso da corrente I_0 (vedi figura). Riarrangiando l'espressione e considerando che $\alpha+\theta=\pi/2$, si ottiene che:

$$dF = I_0 B dl \cos\theta$$

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_0 J_0 D}{2} \cos\theta$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito l'espressione di B trovata al punto 1). Inoltre con la regola della mano destra si può stabilire che la forza per unità di lunghezza dF/dl è attrattiva quando il $\cos\theta$ è positivo, e viceversa è repulsiva quando il $\cos\theta$ è negativo. Infine, dall'ultima espressione scritta si vede che la forza tra filo e nastro è pari a zero quando $\theta=\pi/2$ (o quando θ è un multiplo dispari di $\pi/2$).

Soluzione problema 3

Punto 1): Dato che il sistema di cariche ha simmetria sferica, il campo elettrico rispecchierà tale simmetria e sarà di tipo radiale (ovvero parallelo al versore radiale). Il campo elettrico in condizioni stazionarie è sempre nullo all'interno dei conduttori (metalli), pertanto per $r<R_1$ si ha $E=0$:

$$E(r) \equiv 0 \quad \text{per } r < R_1$$

All'interno del dielettrico abbiamo una distribuzione di carica uniforme pari a ρ, per cui data la simmetria sferica possiamo applicare il teorema di Gauss scegliendo come superficie gaussiana (attraverso cui calcolare il flusso del campo E) una superficie sferica di raggio r concentrica col sistema dato. Per $R_1<r<R_2$ abbiamo che:

$$\Phi(E) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)$$

Nella prima equazione Q_{in} è tutta la carica interna alla superficie sferica di raggio r, e include sia la carica $+Q$ della sfera metallica sia la carica del dielettrico con densità uniforme ρ. Di quest'ultima però bisogna considerare solo la porzione di dielettrico contenuta fra R_1 e r (dove ricordiamo che $r<R_2$). Nella seconda equazione il flusso $\Phi(E)$ è stato espresso come prodotto del modulo di E per la superficie sferica di raggio r, dato che il campo elettrico è a simmetria radiale e sarà quindi uniforme sulla sfera e perpendicolare alla superfice della sfera stessa. Proseguendo con i passaggi si ottiene che:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^3 - R_1^3}{r^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R_1^3}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Qr}{3\pi\varepsilon_0 R_1^3} + \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E(r) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3}{4r^2} - \frac{r}{R_1^3} + \frac{1}{r^2}\right)$$

$$E(r) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4r^2} - \frac{r}{R_1^3}\right) \quad \text{per } R_1 < r < R_2$$

Al secondo passaggio abbiamo sostituito alla densità ρ l'espressione data dal problema, $\rho = -Q/(\pi R_1^3)$. Nell'ultima espressione sostituiamo r con R_1 e R_2 per ottenere il campo elettrico E all'interno del dielettrico ma in prossimità delle interfacce dielettrico-metallo. Sostituiamo prima $r=R_1$ e si ottiene che:

$$E(r = R_1) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4R_1^2} - \frac{R_1}{R_1^3}\right)$$

$$E_{R1} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4R_1^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

Sostituendo invece $r=R_2$ e ricordando che $R_2=2^{1/2}R_1$, si ottiene che:

$$E(r = R_2) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4R_2^2} - \frac{R_2}{R_1^3}\right)$$

$$E_{R2} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4\cdot 2R_1^2} - \frac{2^{1/2}R_1}{R_1^3}\right)$$

$$E_{R2} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{7}{8} - 2^{1/2}\right)$$

Si vede allora che E_{R1} è positivo (direzione radiale uscente) mentre E_{R2} è negativo (direzione radiale entrante).

Passando al guscio metallico si ha che il campo elettrico E è nullo al suo interno:

$$E(r) \equiv 0 \quad \text{per } R_2 < r < R_3$$

Infine consideriamo il campo elettrico all'esterno del sistema di cariche, ovvero per $r>R_3$. Applicando di nuovo il teorema di Gauss abbiamo che:

$$\Phi(E)=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E=\frac{2Q}{\varepsilon_0}+\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3-R_1^3\right)$$

dove la carica interna alla generica sfera di raggio $r>R_3$ include la carica della sfera metallica ($+Q$), la carica del guscio metallico ($+Q$) e tutta la carica contenuta nel guscio dielettrico con densità ρ. Ricordando che $R_2=2^{1/2}R_1$, che $\rho=-Q/(\pi R_1^3)$, e svolgendo alcuni passaggi si ottiene che:

$$E(r)=\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}+\frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(2^{3/2}R_1^3-R_1^3\right)$$

$$E(r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{Q}{3\varepsilon_0 r^2\pi R_1^3}R_1^3\left(2^{3/2}-1\right)$$

$$E(r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2}-\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}\left(2^{3/2}-1\right)$$

$$E(r)=\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{3}{2}-2^{3/2}+1\right]$$

$$E(r)=\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\frac{5}{2}-2^{3/2}\right]\quad \text{per } r>R_3$$

Come si può vedere il campo elettrico $E(r)$ è sempre negativo per $r>R_3$, e in modulo decresce come $1/r^2$. Sostituendo $r=R_3$ si ottiene il valore del campo elettrico nello spazio vuoto in prossimità della superficie metallica esterna (si ricordi che $R_3=3^{1/2}R_1$):

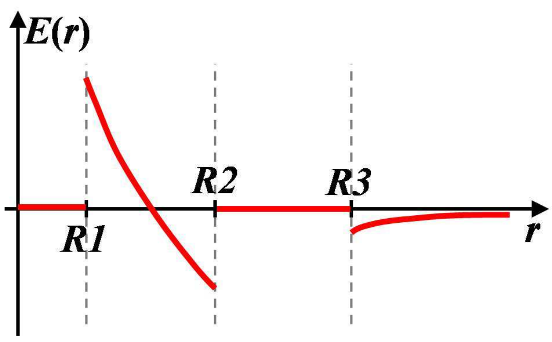
$$E(r=R_3)=\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R_3^2}\left[\frac{5}{2}-2^{3/2}\right]$$

$$E_{R3}=\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0\cdot 3R_1^2}\left[\frac{5}{2}-2^{3/2}\right]$$

$$E_{R3}=\frac{Q}{9\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left[\frac{5}{2}-2^{3/2}\right]$$

Riassumendo i risultati trovati si ha che:

$$\begin{cases} E(r)=0 & \text{per } r<R_1 \\ E(r)=\dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{7}{4r^2}-\dfrac{r}{R_1^3}\right) & \text{per } R_1<r<R_2 \\ E(r)=0 & \text{per } R_2<r<R_3 \\ E(r)=\dfrac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r^2}\left[\dfrac{5}{2}-2^{3/2}\right] & \text{per } r>R_3 \end{cases}$$



Nella figura è riportato un grafico qualitativo di $E(r)$ che tiene conto dei segni che il campo elettrico possiede alle interfacce R_1, R_2 e R_3.

Punto 2): Per determinare le densità di carica superficiale alle interfacce, ricordiamo che in prossimità di una superficie metallica (ma esternamente al metallo) il campo elettrico è dato da:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

dove σ è la densità di carica superficiale. Dato che abbiamo già trovato al punto 1) le espressioni dei campi elettrici alle interfacce metalliche, le rispettive densità superficiali si trovano semplicemente moltiplicando per ε_0 i campi elettrici E_{R1}, E_{R2} e E_{R3}:

$$E_{R1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}$$

$$\sigma_{R1} = \varepsilon_0 E_{R1} = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_{R1} = 0.25\frac{Q}{\pi R_1^2}$$

Per la densità superficiale σ_{R2} bisogna tener presente che il campo elettrico in prossimità della superficie R_2è radiale entrante, e quindi la densità di carica superficiale su R_2 è positiva (solo in questo modo le linee di campo saranno orientate da R_2 verso l'interno del sistema):

$$E_{R2} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left(\frac{7}{8} - 2^{1/2}\right) < 0$$

$$\sigma_{R2} = \varepsilon_0 |E_{R2}| = \frac{Q}{3\pi R_1^2}\left(2^{1/2} - \frac{7}{8}\right) > 0$$

$$\sigma_{R2} \approx 0.18\frac{Q}{\pi R_1^2}$$

Nel caso di r=R_3 il campo elettrico è diretto dall'esterno verso l'interno del guscio metallico, quindi la densità di carica superficiale σ_{R3} deve essere negativa (affinché l'orientamento delle linee di campo elettrico siano coerenti con le distribuzioni di cariche):

$$E_{R3} = \frac{Q}{9\pi\varepsilon_0 R_1^2}\left[\frac{5}{2} - 2^{3/2}\right] < 0$$

$$\sigma_{R3} = \varepsilon_0 E_{R3} = \frac{Q}{9\pi R_1^2}\left[\frac{5}{2} - 2^{3/2}\right] < 0$$

$$\sigma_{R3} \approx -0.04\frac{Q}{\pi R_1^2}$$

Punto 3): Il campo elettrico all'interno del guscio metallico, per R_2<r<R_3, deve essere nullo perché siamo all'interno di un conduttore. Ma del resto vale sempre il teorema di Gauss, che in questo problema lega il campo elettrico $E(r)$ su una superficie sferica di raggio r alla somma delle cariche interne a tale superficie:

$$\Phi(E) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Unendo queste due affermazioni si ha che il campo elettrico per R_2<r<R_3 è sempre nullo se la carica interna è nulla:

$$4\pi r^2 E = 0 = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{in} = 0$$

Dato che in un conduttore le cariche si distribuiscono tutte sulla superficie di esso, per qualsiasi r tale che $R_2<r<R_3$ la carica interna Q_{in} è data dalla somma della carica presente sulla sfera metallica di raggio R_1, dalla carica totale presente all'interno del dielettrico e dalla densità di carica superficiale disposta su R_2. La somma di questi 3 contributi di carica è pari a Q_{in} per $R_2<r<R_3$, e deve sempre essere nulla per poter ottenere campo elettrico E=0 all'interno del conduttore mediante il teorema di Gauss. Ne segue che la seguente equazione deve sempre essere vera:

$$Q + \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right) + 4\pi R_2^2 \sigma_{R2} = 0$$

Imponendo σ_{R2}=0 nell'ultima espressione, si ottiene un'equazione per la densità di volume ρ:

$$Q + \rho \cdot \frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right) = 0$$

$$\rho = -\frac{3Q}{4\pi}\frac{1}{\left(R_2^3 - R_1^3\right)}$$

$$\rho = -\frac{3Q}{4\pi R_1^3}\frac{1}{\left(2^{3/2} - 1\right)} \approx -0.41\frac{Q}{\pi R_1^3}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito $R_2=2^{1/2}\cdot R_1$.