Risultati esame scritto Fisica 2 - 14/06/2017
orali: 21/06/2017 alle ore 11.00 presso aula [redacted]G

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
118563	19	ammesso
115003	15	
114953	14	
115293	nc	
210957	23	ammesso
210984	24	ammesso
114892	11	
213034	18	ammesso
114869	nc	
114952	18	ammesso
115213	18	ammesso
114930	nc	
210935	13	
207396	17	ammesso
110667	13	
118463	12	
118471	17	ammesso
211062	11	
109815	18	ammesso
109859	nc	
207689	23	ammesso
118522	12	
118550	10	
207881	10	
115063	17	ammesso
112083	17	ammesso
118490	11	
210968	10	
207303	20	ammesso
120234	19	ammesso

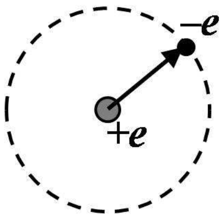
nc = non classificato (< 10)

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 14/06/2017

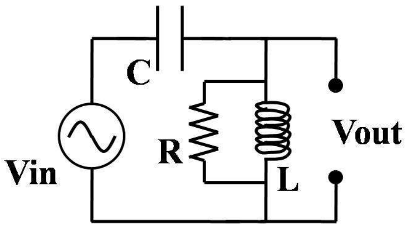
Problema 1

Un atomo di idrogeno è costituito da un nucleo avente la carica di un protone, $Q_+=+|e|$, attorno al quale ruota un elettrone avente carica negativa, $Q_-=-|e|$, dove e è il modulo della carica dell'elettrone ed è pari a $|e|=1.6\cdot10^{-19}$C. Si assuma che l'unica forza presente sia la forza di Coulomb, e che l'elettrone si muova di moto circolare uniforme. Detta $E_{ion}=21.76\cdot10^{-19}$J l'energia di ionizzazione dell'idrogeno, ovvero l'energia minima richiesta per allontanare l'elettrone e portarlo a distanza infinita (dove arriva in condizioni di energia cinetica nulla), determinare il raggio R dell'orbita dell'elettrone. [Risultato numerico]



Problema 2

Sia dato un circuito in corrente alternata come quello rappresentato in figura, di cui sono noti la resistenza elettrica R, l'induttanza L e la capacità C. La tensione alternata in ingresso ha andamento sinusoidale con pulsazione ω e ampiezza V_{0in}.



1) Determinare l'impedenza complessa Z_{TOT} di tutto il circuito, e dare l'espressione del suo modulo Z_0.

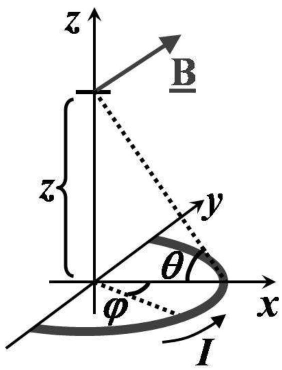
2) Determinare il rapporto fra le ampiezze della tensione in uscita, V_{0out}, e della tensione in ingresso, V_{0in}.

3) Valutare il comportamento limite del rapporto fra le ampiezze di tensione (di cui al punto 2) per $\omega\rightarrow0$ e per $\omega\rightarrow\infty$; si determini inoltre il valore di pulsazione ω_{MAX} per cui tale rapporto è massimo, e quale condizione matematica deve sussistere fra L, R e C affinché possa esistere ω_{MAX}.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: L, C, R, ω, e ove necessario delle costanti universali]

Problema 3

Sia data metà spira circolare di raggio R e percorsa da corrente stazionaria I. Sia detto **B** il vettore campo magnetico generato da questa metà spira su un punto passante per il suo asse e a distanza z dal centro della spira (vedi figura).



1) Determinare l'espressione B_z della componente di **B** parallela all'asse z.

2) Determinare le espressioni di B_x e B_y, componenti di **B** parallele rispettivamente all'asse x e all'asse y (vedi figura).

3) Determinare per quale valore del rapporto z/R il campo magnetico **B** forma un angolo di 45° con l'asse z (risultato numerico).

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri che sono necessari fra: R, I, z, e ove necessario delle costanti universali].

Soluzione problema 1

L'energia E dell'elettrone intorno al nucleo sarà pari alla somma di energia cinetica e potenziale:

$$E = K + U$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + (-e)V(r)$$

dove l'enegia potenziale U è data dall'interazione della carica dell'elettrone, $-e$, col potenziale elettrostatico, $V(r)$, generato dal nucleo nello spazio circostante a distanza r. Usiamo per $V(r)$ l'espressione del potenziale generato dalla carica puntiforme $+e$ del nucleo a distanza genenerica r:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r}$$

dove con tale espressione si è posto $V(r=\infty)=0$. Tornando all'energia E dell'elettrone si ha quindi che:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Ricordando che la forza di Coulomb fra una carica positiva e una negativa è una forza centrale attrattiva, ne segue che la forza di Coulomb è la forza centripeta responsabile del moto circolare uniforme:

$$ma_C = F_{Coulomb}$$

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dove a_C è l'accelerazione centripeta che è pari a v^2/r. Dall'ultima formula scritta possiamo trovare un'espressione per mv^2 da sostituire successivamente nell'energia cinetica:

$$mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Quindi l'energia dell'elettrone diventa:

$$E(r) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Quando l'elettrone si trova nella sua orbita a distanza $r=R$ dal nucleo, esso possiede energia $E(R)$.

Se all'elettrone viene fornita dall'esterno l'energia di ionizzazione E_{ion}, esso riesce a lasciare l'atomo arrivando a distanza infinita con energia cinetica nulla ($K_f=0$). Poiché abbiamo scelto l'espressione del potenziale elettrostatico che ha $V(\infty)=0$, ne segue che a distanza infinita anche l'energia potenziale dell'elettrone sarà nulla ($U_f=0$). Quindi l'energia finale E_f dell'elettrone è data da:

$$E_f = K_f + U_f = 0$$

L'energia iniziale E_i è invece data dall'energia dell'elettrone, $E(R)$ determinata sopra, sommata con l'energia di ionizzazione, E_{ion}, che viene fornita all'elettrone:

$$E_i = E(R) + E_{ion}$$

$$E_i = -\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + E_{ion}$$

Applicando la conservazione dell'energia si ottiene che:

$$E_i = E_f = 0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} + E_{ion} = 0$$

$$E_{ion} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$R = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 E_{ion}} \approx 0.53 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

Soluzione problema 2

Punto 1): Il circuito è costituito dal condensatore C messo in serie col parallelo fra la resistenza R e l'induttanza L. Determiniamo prima di tutto l'espressione dell'impedenza complessa Z_p del parallelo fra R e L:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{j\omega L + R}{j\omega RL}$$

$$Z_p = \frac{j\omega RL}{j\omega L + R}$$

$$Z_p = \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}$$

$$Z_p = \frac{\omega^2 L^2 R + j\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z_p = \frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}(\omega L + jR)$$

Il modulo quadro $|Z_{p0}|^2$ dell'impedenza complessa Z_p è data da:

$$|Z_{p0}|^2 = \frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}(\omega L + jR) \cdot \frac{\omega RL}{R^2 + \omega^2 L^2}(\omega L - jR)$$

$$|Z_{p0}|^2 = \frac{\omega^2 R^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2}(\omega^2 L^2 + R^2)$$

$$|Z_{p0}|^2 = \frac{\omega^2 R^2 L^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

L'impedenza totale Z_{TOT} è invece data dalla serie di Z_p con l'impedenza del condensatore C:

$$Z_{TOT} = \frac{-j}{\omega C} + Z_p$$

$$Z_{TOT} = \frac{-j}{\omega C} + \frac{\omega RL(\omega L + jR)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$Z_{TOT} = \frac{-j\left(R^2 + \omega^2 L^2\right) + \omega RL(\omega L + jR)\omega C}{\omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$Z_{TOT} = \frac{-jR^2 - j\omega^2 L^2 + \omega^3 RL^2 C + j\omega^2 R^2 LC}{\omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$Z_{TOT} = \frac{\omega^3 RL^2 C + j\left(\omega^2 R^2 LC - \omega^2 L^2 - R^2\right)}{\omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$

Per calcolare il modulo Z_0 dell'impedenza Z_{TOT} ripartiamo dall'espressione scritta sopra in cui l'impedenza del parallelo Z_p non era esplicita, e moltiplichiamo per il suo complesso coniugato:

$$Z_{TOT} = \frac{-j}{\omega C} + Z_p$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \left(\frac{-j}{\omega C} + Z_p\right) \cdot \left(\frac{j}{\omega C} + Z_p^*\right)$$

dove Z_p^* indica il complesso coniugato di Z_p.
Svolgendo alcuni passaggi si ottiene che:

$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + Z_p Z_p^* + \frac{j}{\omega C}\left(Z_p - Z_p^*\right)$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + \left|Z_{p0}\right|^2 + \frac{j}{\omega C}\left(2j\,\mathrm{Im}\left[Z_p\right]\right)$$

con $|Z_{p0}|^2$ è pari al modulo quadro dell'impedenza complessa Z_p, e $\mathrm{Im}[Z_p]$ è pari alla parte immaginaria di Z_p.
Sostituendo l'espressione di $|Z_{p0}|^2$ determinata prima, e la parte immaginaria $\mathrm{Im}[Z_p]$, si ottiene che:

$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{\omega^2 R^2 L^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)} + \frac{j}{\omega C}\left(2j\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{\omega^2 R^2 L^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)} - \frac{2\omega R^2 L}{\omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{1}{\omega^2 C^2} + \frac{\omega^2 R^2 L^2}{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)} - \frac{2\omega R^2 L}{\omega C\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{\left(R^2 + \omega^2 L^2\right) + \omega^2 R^2 L^2 \omega^2 C^2 - 2\omega R^2 L \omega C}{\omega^2 C^2\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{R^2 + \omega^2 L^2 + \omega^4 R^2 L^2 C^2 - 2\omega^2 R^2 LC}{\omega^2 C^2\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$
$$\left|Z_0\right|^2 = \frac{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L - 2R^2 C\right) + R^2}{\omega^2 C^2\left(R^2 + \omega^2 L^2\right)}$$

Da questa espressione otteniamo il modulo Z_0 dell'impedenza totale Z_{TOT}:

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L - 2R^2 C\right) + R^2}}{\omega C\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Punto 2): Esprimendo l'impdenza totale del circuito in forma polare, $Z_{TOT}=Z_0 e^{j\phi 0}$, e applicando il metodo dei fasori possiamo scrivere la seguente relazione di Ohm in campo complesso:

$$\vec{V}_{in} = Z_{TOT}\vec{I}$$
$$V_{0in}e^{j\omega t}e^{j\phi in} = Z_0 e^{j\phi 0} I_0 e^{j\omega t}$$
$$V_{0in} = Z_0 I_0 \quad \text{con} \quad \phi_{in} = \phi_0$$
con ϕ_{in} e ϕ_0 ripsettivamente fase della tensione in ingresso e fase dell'impedenza Z_{TOT} (avendo imposto pari a zero la fase della corrente I). Per l'ampiezza di corrente I_0 si ha quindi che:
$$I_0 = \frac{V_{0in}}{Z_0}$$

La tensione in uscita V_{out} è presa ai capi del parallelo, e pertanto applicando la legge di Ohm in campo complesso si ha che:
$$\vec{V}_{out} = Z_p\vec{I}$$
$$V_{0out}e^{j\omega t}e^{j\phi out} = Z_{p0} e^{j\phi p} I_0 e^{j\omega t}$$
$$V_{0out} = Z_{p0} I_0 \quad \text{con} \quad \phi_{out} = \phi_p$$
con ϕ_{out} e ϕ_p ripsettivamente fase della tensione in uscita e fase dell'impedenza Z_p del parallelo.
Sostituendo all'ampiezza di corrente I_0 l'espressione trovata sopra, si ottiene che l'ampiezza V_{0out} della tensione in uscita è la seguente:
$$V_{0out} = Z_{p0}\frac{V_{0in}}{Z_0}$$
$$\frac{V_{0out}}{V_{0in}} = \frac{Z_{p0}}{Z_0}$$
L'ultima espressione scritta mostra che il rapporto fra le ampiezze di tensione in uscita e in ingresso è pari al rapporto fra i moduli delle impedenze complesse:
$$\frac{V_{0out}}{V_{0in}} = \frac{\omega RL}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cdot \frac{\omega C\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}{\sqrt{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L-2R^2 C\right)+R^2}}$$
$$\frac{V_{0out}}{V_{0in}} = \frac{\omega^2 RLC}{\sqrt{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L-2R^2 C\right)+R^2}}$$

Punto 3): Detto $A(\omega)$ il rapporto fra le ampiezze di tensione determinato al punto 2), valutiamo il comportamento di $A(\omega)$ per $\omega\to 0$ e per $\omega\to\infty$:
$$\lim_{\omega\to 0} A(\omega) = \lim_{\omega\to 0}\frac{\omega^2 RLC}{\sqrt{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L-2R^2 C\right)+R^2}} \to \frac{0}{R} = 0$$
$$\lim_{\omega\to \infty} A(\omega) = \lim_{\omega\to \infty}\frac{\omega^2 RLC}{\sqrt{\omega^4 R^2 L^2 C^2 + \omega^2 L\left(L-2R^2 C\right)+R^2}} \to \frac{\omega^2 RLC}{\omega^2 RLC} = 1$$
Quindi il circuito dato si comporta come un filtro passa alto, che in uscita azzera l'ampiezza dei segnali in ingresso a bassa frequenza, mentre lascia inalterata l'ampiezza dei segnali in ingresso ad alta frequenza.

Valutiamo ora se esiste una pulsazione ω_{MAX} alla quale la risposta del circuito è massima. A tal proposito dovremmo valutare il comportamento della derivata $d[A(\omega)]/d\omega$ e trovare in quali punti si annulla per avere i punti di minimo e massimo locale. Ma piuttosto che operare direttamente sulla $A(\omega)$, da un punto di vista del calcolo conviene considerare la sua funzione inversa al quadrato, che nominiamo $F(\omega)$:

$$F(\omega)=\frac{1}{A^2(\omega)}$$

$$F(\omega)=\frac{\omega^4 R^2 L^2 C^2+\omega^2 L\left(L-2R^2 C\right)+R^2}{\omega^4 R^2 L^2 C^2}$$

$$F(\omega)=1+\frac{L\left(L-2R^2 C\right)}{\omega^2 R^2 L^2 C^2}+\frac{R^2}{\omega^4 R^2 L^2 C^2}$$

Il fatto di avere elevato al quadrato $A(\omega)$ non altera il comportamento di $A(\omega)$ dal punto di vista del segno della funzione perché essa è sempre positiva $A(\omega)\geq 0$ per ogni $\omega\geq 0$. Infatti $A(\omega)$ è il rapporto fra due moduli di impedenze complesse, Z_{p0} e Z_0, che sono sempre positivi per definizione. Dato che $F(\omega)=1/A^2(\omega)$, i massimi locali di $A(\omega)$ corrispondono ai minimi locali di $F(\omega)$ e viceversa. Quindi poniamo la derivata $d[F(\omega)]/d\omega=0$ per trovare i punti stazionari di $A(\omega)$:

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega}=-2\frac{L\left(L-2R^2 C\right)}{\omega^3 R^2 L^2 C^2}-4\frac{R^2}{\omega^5 R^2 L^2 C^2}=0$$

$$-2\frac{L\left(L-2R^2 C\right)}{\omega^3 R^2 L^2 C^2}=4\frac{R^2}{\omega^5 R^2 L^2 C^2}$$

$$-\frac{L\left(L-2R^2 C\right)}{2}=\frac{R^2}{\omega^2}$$

$$\omega^2=\frac{2R^2}{L\left(2R^2 C-L\right)}$$

$$\omega^2=\frac{1}{\left(LC-\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}\right)}$$

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC-\frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}}}=\omega_{MAX}$$

Dato che esiste un unico valore di ω tale che $d[F(\omega)]/d\omega=0$, esiste un solo punto stazionario per $A(\omega)$. Siccome $A(\omega)\to 0$ per $\omega\to 0$, $A(\omega)\to 1$ per $\omega\to\infty$ e $A(\omega)\geq 0$ per ogni ω, tale punto stazionario può solo essere un punto di massimo, ovvero la ω appena determinata coincice con la ω_{MAX} richiesta dal problema.

Introducendo i seguenti parametri, ripettivamente ω_{LC} per la pulsazione di risonanza di un circuito LC e τ_{RL} per il tempo caratteristico di un circuito RL:

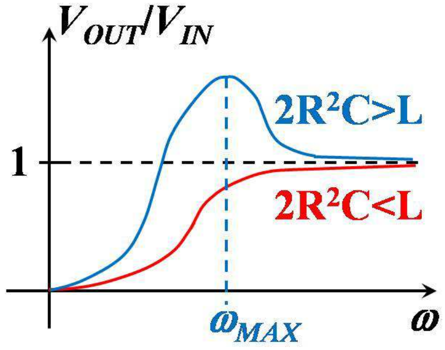
$$\omega_{LC}^2=\frac{1}{LC}$$

$$\tau_{RL}^2=\frac{L^2}{R^2}$$

si ottiene la seguente espressione per ω_{MAX}:

$$\omega_{MAX}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_{LC}^2}-\frac{1}{2}\tau_{RL}^2}}$$

La condizione affinché questo valore di ω_{MAX} sia accettabile fisicamente è che il termine sotto radice sia positivo:



$$\frac{1}{\omega_{LC}^2}-\frac{1}{2}\tau_{RL}^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{\omega_{LC}^2}\geq -\frac{1}{2}\tau_{RL}^2$$

$$LC \geq \frac{1}{2}\frac{L^2}{R^2}$$

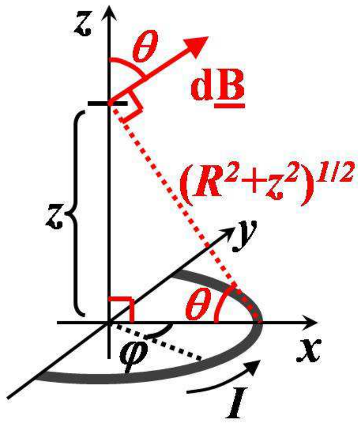
$$2R^2C \geq L$$

Soluzione problema 3

Punto 1): Condideriamo un elemento di filo infinitesimo ***dl*** della mezza spira, percorso da corrente *I*. In un punto dell'asse passante per il centro della spira a distanza *z* dal centro esso genera un campo magnetico infinitesimo ***d*B** dato dalla legge di Biot-Savart:

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{\Delta r}}{|\Delta r|^3}$$

dove **Δr** è il vettore distanza fra l'elemento ***dl*** di filo e il punto in cui calcoliamo il campo ***d*B**, tratteggiato in rosso in figura e pari a $(R^2+z^2)^{1/2}$. Dato che lungo tutta la mezza spira ***dl*** e **Δr** sono perpendicolari, l'angolo compreso è pari a 90° e il modulo del prodotto vettoriale (al numeratore della legge di Biot Savart) si riduce al prodotto dei moduli $dl\cdot\Delta r$.



Pertanto il modulo del vettore ***d*B** è dato da:

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl\cdot\Delta r}{|\Delta r|^3}$$

$$dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{|\Delta r|^2}$$

Per quanto riguarda direzione e verso, la legge della mano destra ci indica che il vettore ***d*B** risultante sarà perpendicolare a **Δr** e rivolto verso l'alto, per tutti i tratti ***dl*** che costituiscono la mezza spira. Dato che al variare di ***dl*** lungo il filo, il vettore **Δr** spazza la superficie laterale di un mezzo cono avente come base la metà spira e come altezza *z*, l'angolo compreso fra tutti i vettori infinitesimi ***d*B** e l'asse *z* è sempre pari a θ.

Quindi per avere la componente di ***d*B** parallela all'asse *z* (dB_z), è sufficiente moltiplicare il modulo di ***d*B** per il $\cos\theta$:

$$dB_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{|\Delta r|^2}\cos\theta$$

$$dB_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{|\Delta r|^2}\frac{R}{|\Delta r|}$$

dove nell'ultimo passaggio il $\cos\theta$ è stato espresso mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo con ipotenusa Δr e cateti pari al raggio *R* della spira e all'altezza *z* (vedi figura):

$$R=\Delta r\cdot\cos\theta$$

$$\cos\theta=\frac{R}{\Delta r}$$

Ricordando che $\Delta r=(R^2+z^2)^{1/2}$, si ottiene la seguente espressione per dB_z:

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{Rdl}{|\Delta r|^3}$$

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}dl$$

Integrando su tutta la lunghezza della metà spira si ottiene il valore totale del campo magnetico lungo l'asse z:

$$B_z = \int dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\int dl$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{(R^2+z^2)^{3/2}}\pi R$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

dove si è tenuto conto del fatto che l'unico termine a variare lungo la semicirconferenza è dl e che la lunghezza di mezza circonferenza è pari πR.

Punto 2): Per calcolare le componenti parallele all'asse x e y dobbiamo ripartire dalla porzione infinitesima $d\mathbf{B}$ di campo magnetico generato da una porzione di filo $\boldsymbol{dl}$. Come prima il suo modulo dB è dato da:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{R^2+z^2}$$

Osservando la figura riportata precedentemente (al punto 1) si vede che la componente di $d\mathbf{B}$ parallela al piano xy è data dal prodotto del modulo dB per il $\sin\theta$. Detta dB_r tale componente parallela al piano xy, si ha che:

$$dB_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{R^2+z^2}\sin\theta$$

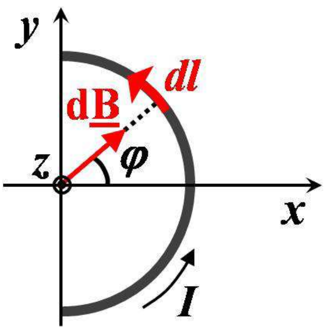
$$dB_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dl}{(R^2+z^2)}\frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$

$$dB_r = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{zdl}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

dove è stato usato il teorema di Pitagora per avere un'espressione di $\sin\theta$:

$$z = \Delta r \cdot \sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}$$



Osservando dall'alto la mezza spira e il campo magnetico infinitesimo $d\mathbf{B}$ (vedi figura), si vede che la componente dB_r appena trovata ha a sua volta una componente lungo x e una lungo y, ottenute moltiplicando dB_r rispettivamente per il $\cos\varphi$ e il $\sin\varphi$:

$$\begin{cases} dB_x = dB_r \cos\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} dl \cos\varphi \\ dB_y = dB_r \sin\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{z}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} dl \sin\varphi \end{cases}$$

Dato che $dl=Rd\varphi$, otteniamo le seguenti espressioni da integrare per φ che va da $-\pi/2$ a $+\pi/2$:

$$\begin{cases} dB_x = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \cos\varphi d\varphi \\ dB_y = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \sin\varphi d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\varphi d\varphi \\ B_y = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin\varphi d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \left[\sin\varphi\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \\ B_y = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \left[-\cos\varphi\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} \dfrac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}} \\ B_y = 0 \end{cases}$$

Come si vede la componente lungo y è nulla, come si poteva dedurre con considerazioni di simmetria, mentre la componente lungo x è diversa da zero ma comunque proporzionale a z. Si noti che per z=0 entrambe le componenti B_x e B_y sono nulle, e solo $B_z \neq 0$.

Punto 3): Dal punto 1) e dal punto 2) si hanno rispettivamente le componenti di **B** parallela all'asse z, B_z, e perpendicolare all'asse z, B_x. La tangente dell'angolo θ formato dal campo magnetico **B** con l'asse z è data da:

$$\tan\theta = \frac{B_x}{B_z}$$

Quando θ=45° si ha che $\tan\theta$=1, da cui segue che:

$$\frac{B_x}{B_z} = 1$$

$$\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{zR}{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}\right] \cdot \left[\frac{4}{\mu_0 I} \frac{\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}{R^2}\right] = 1$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{z}{R} = 1 \rightarrow \frac{z}{R} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$$