Risultati esame scritto Fisica 2 - 26/06/2018
orali: 05/07/2018 alle ore 10.30 presso aula O

gli studenti interessati a visionare lo scritto sono pregati di presentarsi il giorno dell'orale

matricola	voto	
215767	16	amm. Riserva
215446	14	
211988	23	ammesso
118535	16	amm. Riserva
118461	14	
207867	21	ammesso
207541	28	ammesso
209761	13	
118527	16	amm. Riserva
207691	12	
209427	17	ammesso
118548	10	
114930	15	
118454	14	
112878	nc	
118605	10	
211576	26	ammesso
216782	20	ammesso
117836	12	
207671	13	
116400	16	amm. Riserva
207890	20	ammesso
215645	21	ammesso
112076	16	amm. Riserva
207559	nc	
211729	23	ammesso
112102	13	
215338	23	ammesso
215201	22	ammesso
215407	10	
207718	14	
118522	22	ammesso
215146	20	ammesso
118524	18	ammesso
211019	18	ammesso
118571	18	ammesso
118637	nc	
207881	nc	
207375	nc	
119884	16	amm. Riserva

207311	16	amm. Riserva
207650	17	ammesso

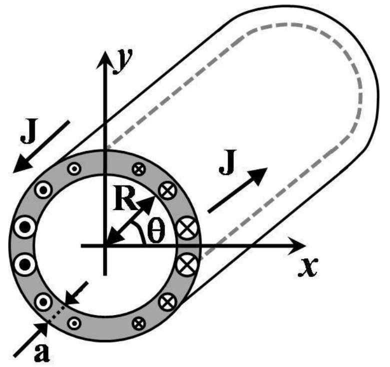
nc = non classificato (< 10)

Esame di Fisica 2

Corso Interateneo di Ing. Informatica e Biomedica – 26/06/2018

Problema 1

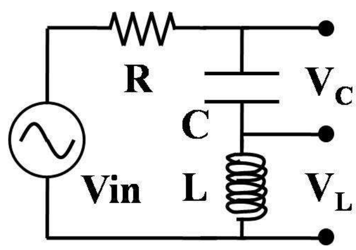
Sia dato un nastro conduttore di spessore a e lunghezza indefinita, ripegato in modo da formare un guscio cilindrico di raggio R (come mostrato in figura) con $a<<R$. Il nastro è percorso da corrente elettrica tangenziale alla superficie cilindrica, ma non uniforme sulla sezione del cilindro. La densità di corrente è data da $J(\theta)=J_0\cos(\theta)$, dove θ è l'angolo formato con l'asse x nel piano xy (vedi figura) e J_0 è una costante con le dimensioni di una densità di corrente. Facendo riferimento alla figura, nella parte di cilindro sulla destra si ha corrente entrante nel foglio, mentre nella parte di sinistra si ha corrente uscente dal foglio. Determinare l'espressione del campo magnetico **B** (modulo, direzione e verso) generato sull'asse del cilindro.



[Si esprima il risultato in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: J_0, a, R, e ove necessario delle costanti universali]

Problema 2

Sia dato un circuito in corrente alternata come quello rappresentato in figura, di cui sono noti la resistenza elettrica R, l'induttanza L e la capacità C. La tensione alternata in ingresso ha andamento sinusoidale con pulsazione ω e ampiezza V_{0in}.



1) Determinare l'impedenza complessa Z_{TOT} di tutto il circuito, e darne l'espressione in forma polare, $Z_{TOT}=Z_0e^{j\alpha}$, determinando il modulo Z_0 e la fase α.

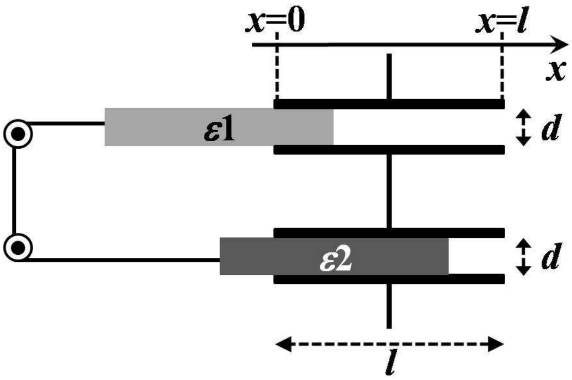
2) Determinare l'ampiezza di tensione V_{0C} in uscita ai capi del condensatore C, l'ampiezza di tensione V_{0L} in uscita ai capi dell'induttanza L, e il rapporto γ fra queste ampiezze di tensione: $\gamma=V_{0L}/V_{0C}$.

3) Determinare la potenza media $<W_J>$ dissipata per effetto Joule sulla resistenza R, e la potenza media $<W_G>$ erogata dal generatore.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: L, C, R, V_{0in}, ω, e ove necessario delle costanti universali]

Problema 3

Siano dati due condensatori piani con piastre quadrate di lato l e separazione fra le piastre pari a d, con $d<<l$ (quindi nelle condizioni di condensatore piano infinito). I due condensatori, collegati come in figura, sono entrambi carichi con carica Q nota. Due lastre dielettriche di superficie quadrata di lato l, spessore d, e costanti dielettriche relative ε_1 e ε_2 sono legate fra di loro mediante carrucole e una fune inestensibile, come rappresentato in figura; la fune e le carrucole sono di massa trascurabile. Sia detta x la posizione della lastra ε_1, dove $x=0$ indica lastra appena fuori dal condensatore e $x=l$ lastra completamente dentro il condensatore (vedi figura). Quando la lastra dielettrica ε_1 (in alto in figura) è completamente inserita nel condensatore (ovvero quando $x=l$), la lastra ε_2 (in basso) è appena fuori dall'altro condensatore (e viceversa). Considerando solo l'intervallo $0<x<l$, determinare:

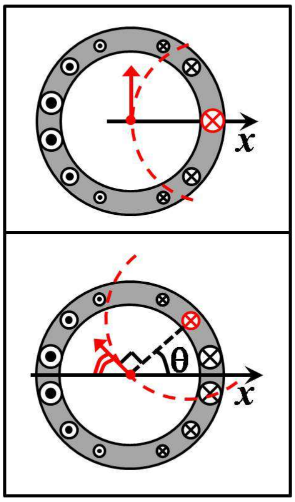


1) le espressioni $C_1(x)$ e $C_2(x)$ delle capacità dei condensatori in funzione della coordinata x definita dal problema, e le espressioni $U_1(x)$ e $U_2(x)$ delle energie elettrostatiche dei due condensatori in funzione di x.

2) la forza elettrostatica totale in funzione di x, $F_{TOT}(x)$, che agisce sulle due lastre dielettriche, e trovare l'espressione della coordinata x di equilibrio, x_{eq}, delle lastre dielettriche.

[Si esprimano i risultati in funzione dei parametri del problema che sono necessari fra: l, d, Q, ε_1, ε_2, e ove necessario della coordinata x e delle costanti universali]

Soluzione problema 1



Possiamo dividere la sezione del nastro conduttore in tanti fili infiniti percorsi da correnti $I(\theta)$ non uniformi attraverso la sezione del guscio cilindrico. Nota l'espressione di $J(\theta)$, ogni filo infinito ha corrente pari a:

$$I(\theta) = J(\theta)aRd\theta$$

$$I(\theta) = J_0 aR\cos(\theta)d\theta$$

dove $Rd\theta$ è l'arco infinitesimo di circonferenza, e $a \cdot Rd\theta$ è la sezione infinitesima attraversata da corrente $I(\theta)$.

Come noto, il campo magnetico **B** generato a distanza R da un filo infinito percorso da corrente I, ha il seguente modulo:

$$B(\theta) = \frac{\mu_0 I(\theta)}{2\pi R}$$

dove la distanza R, pari al raggio del cilindro, è la stessa per tutte le correnti $I(\theta)$ dato che stiamo calcolando il campo magnetico sull'asse del cilindro.

Inoltre il campo **B** generato da un filo infinito ha direzione tangenziale alla circonferenza avente come centro il filo stesso, e gira in senso antiorario intorno al verso della corrente. Nella figura in alto si vede che il campo magnetico generato dalla corrente I passante a θ=0 ha componente solo lungo l'asse y (diretto verso l'alto). Ma più in generale il campo magnetico generato da una corrente I passante ad un θ generico (figura in basso), ha componenti sia lungo x che lungo y. Dalla costruzione geometrica si vede che il campo magnetico $B(\theta)$ (vettore rosso) forma un angolo di (90°−θ) con l'asse x, per cui le sue componenti x e y sono date da:

$$\begin{cases} B_x(\theta) = -B(\theta)\cos(\pi/2-\theta) \\ B_y(\theta) = B(\theta)\sin(\pi/2-\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x(\theta) = -B(\theta)\sin(\theta) \\ B_y(\theta) = B(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$$

dove il segno "–" di fronte a B_x tiene conto del fatto che la componente orizzontale è opposta al verso positivo delle x per $\sin(\theta)>0$ (vedi figura in basso), e viceversa.

Sostituendo nelle componenti B_x e B_y le espressioni trovate per $B(\theta)$ e per la corrente $I(\theta)$ si ottiene che:

$$\begin{cases} B_x(\theta) = -\dfrac{\mu_0 I(\theta)}{2\pi R}\sin(\theta) \\ B_y(\theta) = \dfrac{\mu_0 I(\theta)}{2\pi R}\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x(\theta) = -\dfrac{\mu_0 J_0 aR\cos(\theta)d\theta}{2\pi R}\sin(\theta) \\ B_y(\theta) = \dfrac{\mu_0 J_0 aR\cos(\theta)d\theta}{2\pi R}\cos(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_x(\theta) = -\dfrac{\mu_0 J_0 a}{2\pi}\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \\ B_y(\theta) = \dfrac{\mu_0 J_0 a}{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta \end{cases}$$

Integrando le ultime due espressioni nell'intervallo θ=[0,2π] si ottengono le componenti del campo **B** totale sull'asse del cilindro:

$$\begin{cases} B_{TOT,x} = -\dfrac{\mu_0 J_0 a}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \\ B_{TOT,y} = \dfrac{\mu_0 J_0 a}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta \end{cases}$$

Si noti che gli integrali da calcolare rappresentano i valori medi <...> di note funzioni trigonometriche:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta = <\cos(\theta)\sin(\theta)> = \frac{1}{2} < \sin(2\theta) > = 0$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = <\cos^2(\theta)> = \frac{1}{2}$$

da cui segue immediatamente il risultato richiesto:

$$\begin{cases} B_{TOT,x} = 0 \\ B_{TOT,y} = \dfrac{\mu_0 J_0 a}{2} \end{cases}$$

<u>Soluzione problema 2</u>

Punto 1)

Il circuito è costituito da una serie *RLC*, per cui l'impedenza complessa totale, Z_{TOT}, è la somma delle tre impedenze Z_R, Z_L, Z_C:

$$Z_{TOT} = Z_R + Z_L + Z_C$$

$$Z_{TOT} = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

$$Z_{TOT} = R + j\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)$$

Il modulo Z_0 dell'impedenza complessa Z_{TOT} è dato da:

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \frac{(\omega^2 LC - 1)^2}{\omega^2 C^2}}$$

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}{\omega C}$$

mentre la fase α di Z_{TOT} è data da:

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{Re}[Z_{TOT}]}{Z_0} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Punto 2)

Per calcolare la tensione in uscita ai capi di *C* e ai capi di *L* è necessario conoscere la corrente *I* che circola nel circuito. Applicando il metodo dei fasori, con fase nulla per la corrente, abbiamo che:

$$\vec{V}_{in} = Z_{TOT}\vec{I}$$

$$V_{0in} e^{j\omega t} e^{j\phi in} = Z_0 e^{j\alpha} I_0 e^{j\omega t}$$

$$V_{0in} = Z_0 I_0 \rightarrow I_0 = \frac{V_{0in}}{Z_0}$$

$$\phi_{in} = \alpha$$

dove ϕ_{in} è la fase della tensione in ingresso e α la fase dell'impedenza Z_{TOT} determinata al punto 1).

Sempre col metodo dei fasori, la tensione ai capi del condensatore C è data da:

$$\vec{V}_C = Z_C \vec{I}$$

$$V_{0C} e^{j\omega t} e^{j\phi C} = \frac{-j}{\omega C} I_0 e^{j\omega t}$$

$$V_{0C} e^{j\omega t} e^{j\phi C} = \frac{I_0}{\omega C} e^{j\omega t} e^{-j\pi/2}$$

dove si è usata l'uguaglianza $-j=e^{-j\pi/2}$. Ne segue che:

$$V_{0C} = \frac{I_0}{\omega C}$$

$$\phi_C = -\pi/2$$

dove ϕ_C è la fase della tensione in uscita sul condensatore C, rispetto alla corrente I. Sostituendo all'ampiezza di corrente I_0 e al modulo Z_0 le espressioni trovate prima, si ottiene l'ampiezza V_{0C} ai capi di C:

$$V_{0C} = \frac{V_{0in}}{Z_0} \frac{1}{\omega C}$$

$$V_{0C} = \frac{V_{0in} \omega C}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \frac{1}{\omega C}$$

$$V_{0C} = \frac{V_{0in}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Analogamente la tensione ai capi di L è data da:

$$\vec{V}_L = Z_L \vec{I}$$

$$V_{0L} e^{j\omega t} e^{j\phi L} = j\omega L I_0 e^{j\omega t}$$

$$V_{0L} e^{j\omega t} e^{j\phi L} = \omega L I_0 e^{j\omega t} e^{j\pi/2}$$

dove si è usata l'uguaglianza $j=e^{j\pi/2}$. Ne segue che:

$$V_{0L} = \omega L I_0$$

$$\phi_L = +\pi/2$$

dove ϕ_L è la fase della tensione in uscita sull'induttanza L, rispetto alla corrente I. Sostituendo all'ampiezza di corrente I_0 e al modulo Z_0 le espressioni trovate prima, si ottiene l'ampiezza V_{0L} ai capi di L:

$$V_{0L} = \omega L \frac{V_{0in}}{Z_0}$$

$$V_{0L} = \omega^2 LC \frac{V_{0in}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Il rapporto γ fra le ampiezze di tensione V_{0L} e V_{0C} appena trovate è dato da:

$$\gamma = \frac{V_{0L}}{V_{0C}}$$

$$\gamma = \omega^2 LC \frac{V_{0in}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \Bigg/ \frac{V_{0in}}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$\gamma = \omega^2 LC$$

Punto 3)

Dal fasore di corrente trovato al punto 2) possiamo ottenere la corrente $I(t)$ che circola realmente nel circuito:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left[\vec{I}\right] = \mathrm{Re}\left[I_0 e^{j\omega t}\right]$$

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t) = \frac{V_{0in}}{Z_0} \cos(\omega t)$$

La potenza istantanea dissipata per effetto Joule sulla resistenza R è data da:

$$W_J = RI^2(t)$$

$$W_J = R \frac{V_{0in}^2}{Z_0^2} \cos^2(\omega t)$$

da cui si ottiene la seguente potenza media dissipata $<W_J>$:

$$<W_J> = R \frac{V_{0in}^2}{Z_0^2} < \cos^2(\omega t) >$$

$$<W_J> = \frac{V_{0in}^2 R}{2Z_0^2}$$

dove si è fatto uso del seguente valor medio: $<\cos^2(\omega t)> = ½$. Sostituendo l'espressione di Z_0 trovata al punto 1) si ottiene $<W_J>$ in funzione dei parametri del problema:

$$<W_J> = \frac{V_{0in}^2 R}{2Z_0^2} = \frac{V_{0in}^2}{2} \cdot \frac{\omega^2 C^2 R}{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

Facendo uso dei valori efficaci di tensione di ingresso e di corrente, la potenza media $<W_G>$ erogata dal generatore è data dalla seguente relazione:

$$<W_G> = V_{eff} I_{eff} \cos(\phi_{in}) = \frac{V_{0in}}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi_{in})$$

dove la ϕ_{in}, determinata al punto 2), è la fase della tensione di ingresso rispetto alla corrente. In particolare è stato trovato che $\phi_{in}=\alpha$, per cui sostituendo nell'ultima equazione le espressioni di I_0 e di $\cos(\phi_{in})=\cos(\alpha)$ si ottiene che:

$$<W_G> = \frac{1}{2} V_{0in} \frac{V_{0in}}{Z_0} \cos(\alpha)$$

$$<W_G> = \frac{V_{0in}^2}{2} \frac{1}{Z_0} \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$<W_G> = \frac{V_{0in}^2}{2} \frac{\omega C}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

$$<W_G> = \frac{V_{0in}^2}{2} \cdot \frac{\omega^2 C^2 R}{\omega^2 R^2 C^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}$$

Come si vede $<W_G>=<W_J>$, quindi la potenza media erogata dal generatore è tutta dissipata per effetto Joule.

Soluzione problema 3

Punto 1)

Ciascuno condensatore parzialmente riempito di dielettrico può essere visto come il parallelo di due condensatori di larghezza minore di l, di cui uno è completamente riempito di dielettrico e l'altro è vuoto. Con riferimento alla figura, per la capacità $C_1(x)$ del condensatore in alto si ha la seguente espressione (si tenga presente che le capacità in parallelo si sommano):

$$C_{1,pieno} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 l x}{d}; \quad C_{1,vuoto} = \frac{\varepsilon_0 l (l-x)}{d}$$

$$C_1(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 l x}{d} + \frac{\varepsilon_0 l (l-x)}{d}$$

$$C_1(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]$$

Si osservi che il problema indica con ε_1 (e ε_2) la costante dielettrica relativa e non quella assoluta.

Per il condensatore in basso si può fare un ragionamento analogo (parallelo di due condensatori di larghezza minore di l, di cui uno pieno di dielettrico ε_2 e l'altro vuoto), ma questa volta la coordinata x ha un comportamento opposto al precedente perché x indica comunque la posizione del dielettrico ε_1. Senza perdita di generalità, facendo riferimento alla figura del testo, la parte di C_2 vuota ha larghezza x mentre la parte di C_2 piena di dielettrico ha larghezza $(l-x)$. Ne segue che $C_2(x)$ è dato da:

$$C_{2,pieno} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 l (l-x)}{d}; \quad C_{2,vuoto} = \frac{\varepsilon_0 l x}{d}$$

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 l (l-x)}{d} + \frac{\varepsilon_0 l x}{d}$$

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon_0 l}{d}\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]$$

Dato che i due condensatori non sono collegati ad un generatore di tensione e hanno entrambi carica pari a Q, conviene esprimere la loro energia elettrostatica nella seguente forma:

$$U_1(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1(x)}$$

$$U_1(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l}\frac{1}{\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]}$$

e per $U_2(x)$ abbiamo una relazione analoga:

$$U_2(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2(x)}$$

$$U_2(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l}\frac{1}{\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]}$$

Punto 2)

Si può ricavare la forza totale elettrostatica a partire dall'energia elettrostatica totale, $U_{TOT}(x)$:

$$U_{TOT}(x) = U_1(x) + U_2(x)$$

$$U_{TOT}(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_1(x)} + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_2(x)} = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{1}{C_1(x)} + \frac{1}{C_2(x)}\right]$$

Determiniamo $F_{TOT}(x)$ usando la seguente espressione:

$$F_{TOT}(x) = -\frac{d}{dx}\left[U_{TOT}(x)\right]$$
$$F_{TOT}(x) = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{C_1(x)} + \frac{1}{C_2(x)}\right]$$
$$F_{TOT}(x) = -\frac{Q^2}{2}\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{C_1(x)}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{C_2(x)}\right]\right]$$
$$F_{TOT}(x) = -\frac{Q^2}{2}\left\{-\frac{1}{C_1^2(x)}\frac{dC_1(x)}{dx} - \frac{1}{C_2^2(x)}\frac{dC_2(x)}{dx}\right\}$$
$$F_{TOT}(x) = \frac{Q^2}{2}\left\{\frac{1}{C_1^2(x)}\frac{dC_1(x)}{dx} + \frac{1}{C_2^2(x)}\frac{dC_2(x)}{dx}\right\}$$

Facendo uso delle espressioni di $C_1(x)$ e $C_2(x)$ trovate al punto 1), si ottiene che:

$$F_{TOT}(x) = \frac{Q^2}{2}\left\{\frac{d^2}{\varepsilon_0^2 l^2\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]^2}\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_1 - 1) - \frac{d^2}{\varepsilon_0^2 l^2\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]^2}\frac{\varepsilon_0 l}{d}(\varepsilon_2 - 1)\right\}$$
$$F_{TOT}(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l}\left\{\frac{\varepsilon_1 - 1}{\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]^2} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]^2}\right\}$$

La posizione di equilibrio per le due piastre dielettriche è data dalla coordinata x_{eq} tale che $F_{TOT}(x_{eq})=0$:

$$F_{TOT}(x) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 l}\left\{\frac{\varepsilon_1 - 1}{\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]^2} - \frac{\varepsilon_2 - 1}{\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]^2}\right\} = 0$$
$$\frac{\varepsilon_1 - 1}{\left[l + x(\varepsilon_1 - 1)\right]^2} = \frac{\varepsilon_2 - 1}{\left[\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)\right]^2}$$

Dato che le costanti dielettriche degli isolanti sono sempre maggiori di 1 (quindi $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 1$) entrambi i membri della precedente equazione sono termini positivi e ne possiamo fare la radice quadrata senza problemi:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}{l + x(\varepsilon_1 - 1)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}}{\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)}$$
$$\frac{l + x(\varepsilon_1 - 1)}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}} = \frac{\varepsilon_2 l - x(\varepsilon_2 - 1)}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}}$$
$$\frac{x(\varepsilon_1 - 1)}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}} + \frac{x(\varepsilon_2 - 1)}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}} = \frac{\varepsilon_2 l}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}} - \frac{l}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}$$
$$x\left[\frac{\varepsilon_1 - 1}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}} + \frac{\varepsilon_2 - 1}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}}\right] = l\left[\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}\right]$$
$$x\left[\frac{(\varepsilon_1 - 1)\sqrt{\varepsilon_2 - 1} + (\varepsilon_2 - 1)\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_1 - 1}\sqrt{\varepsilon_2 - 1}}\right] = l\left[\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1 - 1} - \sqrt{\varepsilon_2 - 1}}{\sqrt{\varepsilon_2 - 1}\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}\right]$$

Notando che il denominatore di ambo i membri è lo stesso, si ottiene infine la seguente espressione per x_{eq}:

$$x_{eq} = l \cdot \left[\frac{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1 - 1} - \sqrt{\varepsilon_2 - 1}}{(\varepsilon_1 - 1)\sqrt{\varepsilon_2 - 1} + (\varepsilon_2 - 1)\sqrt{\varepsilon_1 - 1}}\right]$$